

Л.В. Уткин

# АНАЛИЗ РИСКА И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

$$m(A_i) = c_i/N$$

$$\text{Bel}(A) = \sum_{A_i \in A} m(A_i)$$

$$E[h(X)] = \sum_{i=1}^n m(A_i) \cdot \inf_{x \in A_i} h(x)$$

АНАЛИЗ РИСКА И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ



Л.В. УТКИН

**АНАЛИЗ РИСКА И ПРИНЯТИЕ  
РЕШЕНИЙ ПРИ НЕПОЛНОЙ  
ИНФОРМАЦИИ**



Санкт-Петербург

«НАУКА»

2007

УДК 519.8

ББК 65В6

У84

**Уткин Л.В. Анализ риска и принятие решений при неполной информации.** – СПб.: Наука, 2007. – 404 с.

ISBN 978–5–02–025187–8

В книге впервые всесторонне рассмотрены вопросы анализа риска и принятия решений при существенной неполноте исходной информации, что вызвано в первую очередь отсутствием достаточных статистических данных и наличием субъективной информации в виде экспертных оценок, которые в ряде случаев являются ненадежными и неточными.

В первой части книги анализируются модели и методы формализации неполноты исходной информации, к которым можно отнести теорию случайных множеств, теорию возможностей, теорию интервальных средних, байесовские модели, интервальные вероятности. Во второй части книги рассматривается применение этих моделей и методов для решения общих задач принятия решений и анализа риска, а также ряда специальных экономических задач, включая страхование, гарантийные обязательства, эффективность инвестиций. Большое количество примеров иллюстрирует рассмотренные модели и методы описания неполноты информации и принятия решений, а также наглядно показывает практическую ценность этих моделей и методов.

Книга предназначена для специалистов в области экономико-математических методов, для студентов и аспирантов, а также для специалистов в других областях.

#### Р е ц е н з е н т ы:

*Черноруцкий И.Г.*, д-р техн.наук, профессор, заведующий кафедрой информационных и управляющих систем Санкт-Петербургского политехнического университета  
*Соколова С.П.*, д-р техн.наук, профессор, ведущий научный сотрудник Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации РАН

© Л.В. Уткин, 2007

© Санкт-Петербургская государственная лесотехническая академия, 2007

© Издательство «Наука», 2007

ISBN 978–5–02–025187–8

# Оглавление

Предисловие .....	9
<b>Часть I Методы описания неопределенности и неполноты информации .....</b>	<b>15</b>
<i>Глава 1. Теория вероятностей .....</i>	<i>17</i>
1.1. Вероятностная мера .....	17
1.2. Обоснование использования вероятности .....	20
1.3. Независимость .....	25
1.4. Случайная величина .....	27
1.5. Математическое ожидание и дисперсия .....	29
1.6. Интервальные вероятности .....	31
1.7. Заключение .....	36
<i>Глава 2. Теория свидетельств Демпстера–Шейфера .</i>	<i>38</i>
2.1. Основные определения теории Демпстера–Шейфера	38
2.2. Функции доверия и множество полиномиальных моделей .....	42
2.3. Функции доверия и случайные множества .....	45
2.4. Нижняя и верхняя функции распределения .....	48
2.5. Основные отличия теории вероятностей и теории случайных множеств .....	51
2.6. Правила комбинирования свидетельств .....	52
2.6.1. Правило комбинирования Демпстера .....	52
2.6.2. Правило дисконтирования .....	55
2.6.3. Правило комбинирования Ягера .....	58
2.6.4. Параметрическое семейство правил комби- нирования Инагаки .....	60
2.7. Заключение .....	61
<i>Глава 3. Элементы теории возможностей .....</i>	<i>63</i>
3.1. Нечеткие множества .....	63
3.2. Меры возможности и необходимости .....	67
3.3. Способы интерпретации мер возможности .....	72

3.3.1.	Возможность как верхняя граница вероятности.....	72
3.3.2.	Возможность как функция правдоподобия в рамках теории случайных множеств .....	73
3.3.3.	Распределение возможностей и р-блоки .....	75
3.4.	Определение возможности и необходимости с использованием мер Сугено .....	77
3.5.	Заключение .....	78
<b>Глава 4.</b>	<b>Элементы теории интервальных средних ...</b>	<b>80</b>
4.1.	Предпосылки создания теории интервальных средних .....	80
4.2.	Основы теории интервальных средних .....	81
4.3.	Теорема продолжения.....	84
4.4.	Формализация некоторых качественных оценок.....	92
4.4.1.	Условие унимодальности распределений .....	92
4.4.2.	Экссесс, асимметрия и дисперсия .....	96
4.5.	Условные интервальные средние.....	98
4.6.	Независимость интервальных средних .....	101
4.6.1.	Отсутствие сведений о независимости или неизвестное взаимодействие .....	101
4.6.2.	Строгая независимость .....	103
4.6.3.	Свободные произведения .....	107
4.6.4.	Независимость повторений .....	108
4.7.	Заключение .....	109
<b>Глава 5.</b>	<b>Байесовский подход .....</b>	<b>111</b>
5.1.	Основные положения байесовского подхода .....	111
5.2.	Распределение Дирихле .....	120
5.3.	Обобщенная модель Дирихле .....	123
5.4.	Робастная модель засорения .....	126
5.5.	Расширенные функции доверия и правдоподобия ...	128
5.6.	Расширенные функции доверия и случайные множества.....	131
5.7.	Свойства расширенных функций доверия и правдоподобия .....	133
5.8.	Расширенное распределение возможностей .....	136
5.9.	Модификация правил комбинирования свидетельств	137
5.9.1.	Линейная комбинация свидетельств .....	138
5.9.2.	Модифицированное правило комбинирования Демпстера .....	141
5.10.	Расширенные границы функции распределения и математического ожидания .....	144

5.11.	Бета-биномиальная модель .....	145
5.11.1.	Бета-биномиальное распределение .....	145
5.11.2.	Обобщенная бета-биномиальная модель .....	148
5.11.3.	Применение бета-биномиального распределения в модели страхования .....	149
5.12.	Отрицательная биномиальная модель .....	152
5.12.1.	Отрицательное биномиальное распределение .....	152
5.12.2.	Обобщенная отрицательная биномиальная модель .....	155
5.12.3.	Применение отрицательного биномиального распределения в модели гарантийных обязательств .....	156
5.13.	Гамма-экспоненциальная модель .....	161
5.13.1.	Гамма-экспоненциальное распределение .....	161
5.13.2.	Обобщенная гамма-экспоненциальная модель .....	162
5.14.	Заключение .....	163
5.15.	Приложение к главе 5 .....	164
<b>Глава 6. Модели неопределенности второго порядка</b> .....		<b>169</b>
6.1.	Ненадежные оценки .....	169
6.2.	Три задачи обработки оценок .....	173
6.3.	Вычисление интервала вероятностей (первая задача) .....	175
6.4.	Вычисление “среднего” интервала (вторая задача) ..	183
6.5.	Модификация вероятностей второго порядка (третья задача) .....	186
6.6.	Числовые примеры .....	189
6.7.	Определение вероятностей второго уровня .....	193
6.8.	Иерархические модели при известном типе распределения .....	201
6.8.1.	Решение задачи для первого частного случая .....	203
6.8.2.	Решение задачи для второго частного случая .....	204
6.8.3.	Решение задачи в общем случае .....	206
6.8.4.	Осторожные оценки при известном типе распределения .....	209
6.9.	Заключение .....	212
<b>Часть II Анализ риска и принятие решений</b> .....		<b>213</b>
<b>Глава 7. Классические методы принятия решений</b> ..		<b>215</b>
7.1.	Постановка задачи принятия решений в условиях неопределенности .....	215
7.1.1.	Основные элементы задачи принятия решений .....	216

7.2.	Принятие решений в условиях определенности . . . . .	221
7.3.	Принятие решений в условиях неопределенности . . . . .	221
7.3.1.	Критерий равновозможных состояний . . . . .	222
7.3.2.	Критерий максимина Вальда . . . . .	222
7.3.3.	Критерий пессимизма–оптимизма Гурвица . . . . .	223
7.3.4.	Критерий минимакса сожалений Сэвиджа . . . . .	224
7.4.	Принятие решений в условиях риска . . . . .	225
7.4.1.	Критерий максимума ожидаемой полезности . . . . .	226
7.4.2.	Критерий Ходжа–Лемана . . . . .	229
7.4.3.	Критерий наиболее вероятного состояния природы . . . . .	230
7.4.4.	Критерий минимума ожидаемых сожалений . . . . .	230
7.5.	Определение функции полезности и психологические аспекты принятия решений . . . . .	231
7.6.	Основные аксиомы теории полезности . . . . .	238
7.7.	Заключение . . . . .	241

<i>Глава 8.</i>	<b>Принятие решений при неполной информации</b> . . . . .	243
8.1.	Парадокс Эллсберга . . . . .	243
8.2.	Критерии принятия решений . . . . .	246
8.3.	Принятие решений при линейных ограничениях на распределения состояний природы . . . . .	249
8.3.1.	Пессимистическое принятие решений . . . . .	250
8.3.2.	Принятие решений с использованием параметра осторожности . . . . .	254
8.4.	Принятие решений с использованием обобщенной модели Дирихле . . . . .	261
8.4.1.	Общий подход к пессимистическому принятию решений . . . . .	261
8.4.2.	Принятие решений с параметром осторожности . . . . .	267
8.5.	Нечеткая модель принятия решений . . . . .	273
8.5.1.	Нечеткое множество ожидаемой полезности . . . . .	273
8.5.2.	Нечеткая робастная модель . . . . .	277
8.5.3.	Частный случай функции принадлежности . . . . .	279
8.6.	Принятие решений при неточных исходных данных . . . . .	283
8.6.1.	Принятие решений с использованием функций доверия . . . . .	283
8.6.2.	Принятие решений с использованием расширенных функций доверия . . . . .	284
8.7.	Принятие решений в рамках иерархических моделей второго порядка . . . . .	290

8.8. Принятие решений при известном типе распределения вероятностей состояний природы .....	296
8.9. Заключение .....	301
<b>Глава 9. Принятие решений при непрерывном множестве состояний природы и интервальной функции распределения .....</b>	<b>303</b>
9.1. Непрерывные множества состояний природы и р-блоки .....	303
9.2. Постановка задачи в терминах линейного программирования .....	305
9.3. Постановка задачи в терминах непрерывных случайных множеств .....	306
9.4. Монотонные функции полезности .....	307
9.5. Функция полезности с одним максимумом или минимумом .....	309
9.6. Условные математические ожидания .....	312
9.7. Р-блоки и функции доверия .....	316
9.8. Распределение возможностей .....	321
9.9. Функция двух переменных с одним максимумом ...	325
9.9.1. Строгая независимость .....	325
9.9.2. Независимость случайных множеств .....	327
9.9.3. Отсутствие информации о независимости ...	328
9.10. Функция с произвольным числом точек минимума и максимума .....	330
9.11. Рандомизированное действие .....	331
9.11.1. Приближенное решение в терминах двойственной задачи программирования .....	334
9.11.2. Приближенное решение задачи в терминах случайных множеств .....	335
9.12. Заключение .....	336
9.13. Приложение к главе 9 .....	338
<b>Глава 10. Анализ риска инвестиций .....</b>	<b>349</b>
10.1. Понятие чистой современной ценности инвестиций ..	349
10.2. Формальная постановка задачи .....	353
10.3. NPV и случайные множества .....	354
10.3.1. Упрощенный метод расчета NPV “в среднем”	356
10.3.2. Независимость случайных множеств .....	357
10.3.3. Отсутствие сведений о независимости .....	360
10.3.4. Строгая независимость .....	361



10.3.5. Монотонная функция NPV, независимость случайных множеств и неизвестное взаимодействие .....	363
10.3.6. Монотонная функция NPV, строгая независимость .....	365
10.3.7. Немонотонная функция NPV, независимость случайных множеств и неизвестное взаимодействие .....	366
10.3.8. Немонотонная функция NPV, строгая независимость .....	368
10.4. Использование информации об экспертах .....	370
10.5. Осторожный анализ NPV с использованием обобщенной модели Дирихле .....	372
10.6. Оценка риска при наличии двух параметров .....	374
10.6.1. Строгая независимость .....	375
10.6.2. Отсутствие сведений о независимости .....	376
10.6.3. Точечные оценки .....	379
10.7. Заключение .....	382
<b>Послесловие</b> .....	<b>385</b>
<b>Литература</b> .....	<b>387</b>
<b>Предметный указатель</b> .....	<b>402</b>

## **Предисловие**

Практически во всех прикладных областях экономики и техники принятие оптимальных решений и анализ риска являются одними из важнейших этапов реализации проектов и разработок. Поэтому достаточно трудно найти такое направление исследований, которому было бы посвящено столь большое число публикаций, как теории принятия решений.

Необходимо отметить, что понятие риска различным образом трактуется в литературе. Однако большинство определений сводится к тому, что главной целью анализа риска является поддержка процесса принятия решений. Другими словами, анализ риска обеспечивает базу для сравнения различных вариантов систем, действий, реализаций в условиях неопределенности. При этом риск возникает только тогда, когда имеет место неопределенность относительно событий в будущем, которые определяют выбор того или иного варианта решения. С этой точки зрения анализ риска можно рассматривать как один из аспектов теории принятия решений, что также определяет выбор мер, или показателей, риска. Можно выделить две наиболее распространенные меры риска. Первая мера основана на определении вероятности того, что некоторое событие, представляющее интерес и определяющее стратегию принятия решений, превышает заданное заранее нормативное или предельное значение. Использование данной меры риска приводит к поиску такого решения, при котором определяемая вероятность максимальна или минимальна в зависимости от конкретной ситуации принятия решений. Вторая мера использует некоторую весовую сумму последствий принятия определенного решения при наступлении того или иного события. При этом в большинстве случаев в качестве весов используют вероятности наступления соответствующих событий, что позволяет говорить о второй мере как об ожидаемых последствиях решения. Использование данной

меры риска приводит к поиску такого решения, при котором ожидаемые последствия максимальны или минимальны в зависимости от поставленной задачи.

Определяющим фактором при анализе риска и принятии решений является наличие информации в том или ином виде об интересующих объектах и событиях. Здесь необходимо различать неопределенность, которая объективно всегда имеет место и влияет на процесс принятия решения, и неполноту информации. Можно иметь полную информацию о событиях в будущем, но это не изменяет степень неопределенности того, какое событие произойдет. Полнота имеющейся информации в данном случае заключается только в том, что точно известен закон, в соответствии с которым наступит то или иное событие, например распределение вероятностей событий, что в свою очередь подразумевает наличие достаточной статистики для вычисления этих вероятностей. В то же время абсолютно полная информация – это идеализация. На самом деле, абсолютно полной информации не существует. Тем не менее во многих случаях с некоторой степенью приближения неполную информацию заменяют полной или предполагают, что имеется полная информация. Это оправдано во многих прикладных задачах. Отличительной особенностью многих экономических задач является существенная неполнота и неоднородность исходной информации, что вызвано в первую очередь отсутствием достаточных статистических данных и наличием субъективной информации в виде экспертных оценок, которые в ряде случаев являются ненадежными и неточными. Следует заметить, что методам обработки такой неполной информации и принятия решений на ее основе посвящено большое количество публикаций, что вызвано актуальностью их разработки и анализа применимости в различных ситуациях принятия решений. Однако большинство методов направлено на поиск подходящей замены неполной информации. Наиболее простым примером такой замены является использование постулата Лапласа, согласно которому при полном отсутствии какой-либо информации, т.е. при максимальной степени ее неполноты, следует использовать равномерное распределение вероятностей. Ниже будет показано, что постулат Лапла-

са может привести к противоречивым результатам и к существенным ошибкам в принятии решений. Предлагаемые в литературе методы замены неполной информации имеют свои достоинства и недостатки. Альтернативой данному подходу к обработке неполной информации могут служить методы, рассматривающие неполноту информации в целом, которым и посвящена данная книга.

Книга разделена на две основные части. В первой части данной книги анализируются существующие и предлагаются новые модели и методы формализации неполноты исходной информации, к которым можно отнести теорию Демпстера–Шейфера, или теорию случайных множеств, теорию возможностей, теорию интервальных средних и другие. Во второй части книги рассматривается применение этих моделей и методов для решения общих задач принятия решений и анализа риска, а также ряда специальных экономических задач, включая страхование, гарантийные обязательства, эффективность инвестиций и т.д.

Первую часть открывает глава, посвященная основным понятиям теории вероятностей. Ее целью не является детальное изложение теории вероятностей. В ней главным образом постепенно ставится проблема неполноты информации и тех сложностей, которые могут встретиться при попытке формализовать неполноту информации стандартными методами теории вероятностей. В главе также кратко рассмотрены понятия множеств распределений вероятностей как наиболее простого и естественного перехода от традиционных моделей описания неопределенности к моделям неполноты информации.

Вторая глава посвящена основным понятиям теории Демпстера–Шейфера, или теории случайных множеств. Эта теория является достаточно мощным инструментом для моделирования неточности и неопределенности. Она позволяет моделировать полное отсутствие исходной информации, но работает только с определенным видом исходной информации.

Третья глава кратко рассматривает элементы теории возможностей. В этой главе даются различные способы интерпретации меры возможности и меры необходимости.

Основные положения теории интервальных средних и принцип продолжения как главный элемент теории анализируются в четвертой главе. Основная цель главы – продемонстрировать, насколько мощным инструментом является теория интервальных средних, насколько разнообразны оценки, с которыми она может успешно работать.

Пятая глава посвящена байесовскому подходу и его обобщению на основе теории интервальных средних. В этой большой главе рассмотрены обобщенные байесовские модели, открывающие целое направление исследований в статистике, в рамках которого многие недостатки традиционных байесовских моделей могут быть преодолены. В главе предложены новые методы анализа риска при страховании и методы оптимального выбора параметров гарантийных обязательств в условиях недостатка статистической информации о страховых случаях и отказах оборудования соответственно.

Одними из причин возникновения неполноты исходной информации являются неточность и ненадежность оценок экспертов. Попытка формализовать данный вид оценок с использованием теории интервальных средних сделана в шестой главе.

Седьмая глава уже относится ко второй части книги и посвящена вопросам классической теории принятия решений. Она в большей степени предназначена для читателя, который впервые знакомится с теорией принятия решений. Поэтому в главе не содержится новых результатов, а ее разделы можно найти во многих книгах по теории принятия решений.

Важное место в книге отводится описанию методов принятия решений при различных способах представления неполной информации. Эти методы детально рассмотрены в восьмой главе. При этом определены новые критерии принятия решений, свойственные ситуации, когда информация о состояниях природы является неполной, и отличающиеся от критериев классической теории принятия решений. Разработаны эффективные вычислительные алгоритмы принятия решений, большинство из которых сводятся к простейшим задачам линейного программирования.

Девятая глава посвящена вопросам принятия решений, ко-

гда множество состояний является непрерывным, а неполнота информации формализована интервалом распределений вероятностей. Это достаточно важный класс задач принятия решений, который в некотором смысле граничит с задачами вариационного исчисления.

Завершающая десятая глава рассматривает вопросы анализа риска инвестиций. В частности, вычисляется интервальная вероятность того, что чистая современная ценность инвестиций превысит некоторое заданное значение при условии неполной информации о параметрах данного показателя инвестиционной привлекательности проектов.

Изложение теории в книге сопровождается большим количеством подробно рассмотренных примеров, что позволяет читателю лучше понять предлагаемые подходы и оценить степень их реализуемости при решении практических задач.

Книга не ставит своей целью детальное и всестороннее рассмотрение и обсуждение вопросов принятия решений и анализа риска. Более того, читатель может заметить, что многие задачи в книге выступают в большей степени как приложения различных методов описания и формализации неполной информации.

Несмотря на сложность математического описания многих подходов в книге, автор не ставил цели дать строгое их математическое описание, чтобы сконцентрировать внимание читателя в большей степени на самих подходах к описанию неполноты информации и принятия решений.

Книга предназначена для широкого круга читателей. Прежде всего это специалисты в области экономико-математических методов. Книга также может быть интересна для аналитиков и экспертов при решении экономических и финансовых задач. Студенты и аспиранты смогут найти систематизированный материал по классической теории принятия решений, а также по методам формализации экспертных оценок и статистических данных. Несмотря на то что большинство приложений и примеров в книге носят экономический характер, книга представляет интерес для специалистов в самых различных областях.

Автор выражает признательность семье за терпение и по-

нимание сложности процесса написания книги, а также родителям за ценные замечания и редактирование. Автор выражает особую признательность С.В. Гурову за его постоянную помощь и поддержку, рецензентам И.Г. Черноруцкому и С.П. Соколовой, рекомендовавших книгу к изданию. Автор также выражает глубокую благодарность Т. Аугустин, А. Вальнер, К. Вайхзельбергер, С. Дестерке, Д. Дюбуа, И. Козину, Ф. Коолен, Х. де Кумен, Д.Р. Тростинскому, М. Троффаес, П. Уолли, С.П. Хабарову и И.Б. Шубинскому за многочисленные полезные дискуссии и советы, за плодотворное обсуждение многих идей и вопросов, которые нашли свое отражение в данной книге.

## Часть I

# Методы описания неопределенности и неполноты информации





# Глава 1

## Теория вероятностей

Истинная логика нашего мира – это подсчет вероятностей.

*Джеймс Клерк Максвелл*

### 1.1. Вероятностная мера

Пусть имеется конечное множество  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  возможных исходов, которое также называется *пространством элементарных событий*. Каждому исходу можно приписать некоторое неотрицательное число, которое является *вероятностью* исхода, описывающей степень уверенности в том, что данный исход произойдет в некотором эксперименте. Например, бросая игральную кость с 6 гранями, мы имеем 6 возможных исходов бросания (иногда называемых *элементарными исходами* или *событиями*), которые определяются числами на гранях кости. Можно приписать число  $1/6$  каждому исходу, если предполагать, что все исходы равновероятны. При этом выбор числа  $1/6$  сделан, исходя из условия, что сумма всех вероятностей элементарных исходов равна 1. С другой стороны, если исход “1” является намного более вероятным, чем другие исходы, то можно приписать вероятность  $1/2$  исходу “1”, а вероятности всех остальных исходов  $1/10$ .

Зная вероятности  $1/6$  каждого исхода, возникает задача определения вероятности того, что при бросании кости выпадет “1” или “2”. В данном случае мы уже говорим о вероятности множества исходов  $\{\omega_1, \omega_2\}$ . Логично принять вероятность этого события равной  $1/3$ , т.е. вероятность в данном случае равна сумме вероятностей исходов  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Аналогично

рассуждая, можно сказать, что вероятность всего множества возможных исходов  $\{\omega_1, \dots, \omega_6\}$  (*полная группа событий*) равна 1. В теории вероятностей значение 1 принято для обозначения полной определенности. Так как мы определенно знаем, что один из исходов обязательно произойдет, то вероятность всего множества возможных исходов  $\{\omega_1, \dots, \omega_6\}$  равна 1.

*Алгебра*  $\mathcal{F}$  подмножеств  $\Omega$  – это множество всех подмножеств  $\Omega$ , которое содержит  $\Omega$  и замкнуто относительно операций объединения и дополнения. Например, если  $\Omega$  – множество товаров, продаваемых некоторой фирмой, состоящее из двух элементов {сталь, чугун}, то алгеброй в данном случае является множество подмножеств:  $\{\emptyset\}$ , {сталь}, {чугун}, {сталь, чугун}.

Таким образом множество  $\mathcal{F}$  подмножеств  $\Omega$  является алгеброй, если для любых  $U$  и  $V$  из  $\mathcal{F}$  подмножества  $U \cup V$  и  $U^c$  также принадлежат  $\mathcal{F}$ . Здесь  $U^c$  – дополнение  $U$ , т.е.  $U^c = \Omega \setminus U$ . Заметим, что из определения алгебры следует, что она замкнута также относительно операции пересечения. Областью определения вероятностных мер является алгебра множеств. В том случае, если множество  $\Omega$  бесконечно, областью определения вероятностных мер является  $\sigma$ -алгебра или *борелевское поле* событий, которая замкнута относительно счетного числа объединений. Множеством значений вероятностных мер является интервал  $[0,1]$ .

**Определение 1.1.** *Вероятностное пространство – это тройка  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ , где  $\mathcal{F}$  – алгебра всех подмножеств множества  $\Omega$  и функция  $p : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  удовлетворяет следующим двум свойствам:*

C1.  $p(\Omega) = 1$ .

C2.  $p(U \cup V) = p(U) + p(V)$ , если  $U$  и  $V$  – непересекающиеся элементы алгебры  $\mathcal{F}$ .

Множества, принадлежащие  $\mathcal{F}$ , называются *измеримыми множествами*, функция  $p$  называется *вероятностной мерой на  $\Omega$*  (или на  $\mathcal{F}$ ).  $\Omega$  часто также называется *выборочным пространством*, а элементы  $\mathcal{F}$  – *случайными событиями*. Заметим, что аргументами функции  $p$  являются подмножества  $\Omega$ , а не элементы  $\Omega$ .

Из свойств С1 и С2 следует, что  $p(\emptyset) = 0$ . Действительно, так как  $\emptyset$  и  $\Omega$  не пересекаются, то

$$1 = p(\Omega) = p(\Omega \cup \emptyset) = p(\Omega) + p(\emptyset) = 1 + p(\emptyset)$$

и  $p(\emptyset) = 0$ .

Хотя свойство С2 применено только к парам множеств, его достаточно просто расширить на объединение любого конечного числа непересекающихся подмножеств. Если  $U_1, \dots, U_k$  — попарно непересекающиеся элементы  $\mathcal{F}$ , то

$$p(U_1 \cup \dots \cup U_k) = p(U_1) + \dots + p(U_k).$$

Это свойство известно как *конечная аддитивность*. Заметим, что если множество  $\Omega$  конечно и  $\mathcal{F}$  состоит из всех подмножеств  $\Omega$ , то вероятностная мера может характеризоваться как функция  $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$ , такая что  $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ . Другими словами, можно принять область определения вероятностной меры, состоящей только из элементов  $\Omega$ , и в случае необходимости расширить  $p$  на любые подмножества  $\Omega$ , используя условие  $p(U) = \sum_{\omega \in U} p(\omega)$ .

Если  $\Omega$  бесконечно и  $\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра, то обычно требуется, чтобы  $p$  являлась  *$\sigma$ -аддитивной* или *счетно-аддитивной* так, что если  $U_1, U_2, \dots$  — попарно непересекающиеся элементы  $\mathcal{F}$ , то<sup>1</sup>

$$p(\cup_i U_i) = p(U_1) + p(U_2) + \dots .$$

Так как в основном будут рассматриваться ситуации, когда множество элементарных исходов конечно, то специально не будет определяться в дальнейшем, являются ли вероятности счетно-аддитивными или конечно-аддитивными. Кроме того, следует отметить, что основной целью этой главы не является исчерпывающее описание всех элементов теории вероятностей. Поэтому рассмотрение ограничивается только теми базовыми понятиями и определениями, которые пригодятся в дальнейшем при сравнении различных подходов для описания неопределенности.

---

<sup>1</sup>Примерно в таком виде аксиоматика теории вероятностей была сформулирована А.Н. Колмогоровым [159].

## 1.2. Обоснование использования вероятности

Используя вероятности для описания неопределенности, прежде всего необходимо объяснить, откуда получены эти вероятности и почему аддитивность свойственна для данного типа неопределенности. Без этого объяснения далеко не очевидно, как определить вероятности при анализе конкретного объекта или явления и как интерпретировать результаты анализа, полученные при использовании вероятностей.

При отсутствии исходной информации об объекте или явлении при его анализе используют принцип максимума энтропии, или постулат Лапласа<sup>2</sup>. При этом для случайной величины, характеризующей объект или явление, определяются “основные” исходы или значения, которые эта случайная величина может принимать. Далее назначаются одинаковые вероятности всем исходам. Если имеется  $n$  основных исходов, то в соответствии с постулатом Лапласа, или принципом максимума энтропии, вероятность каждого из них равна  $1/n$ . Это является обоснованием для приписывания вероятности  $1/6$  каждому из 6 исходов игральной кости (кубика).

Однако использование одинаковых вероятностей для каждого исхода зачастую приводит к противоречивым и неоднозначным результатам, прежде всего потому, что не всегда очевидно, как определить основные исходы. Различный выбор основных исходов приводит к различным вероятностям. Например, вероятность того что некоторая семейная пара имеет двух мальчиков, в соответствии с принципом максимума энтропии, равна  $1/3$ , так как имеются три основных исхода: 1 – два мальчика, 2 – две девочки, 3 – мальчик и девочка. Если считать, что все исходы равновероятны, то вероятность двух мальчиков равна  $1/3$ . В то же время мы можем описать возможные исходы следующим образом: 1 – два мальчика, 2 – две девочки, 3 – первый мальчик и вторая девочка, 4 – первая девочка и второй мальчик. В этом случае вероятность двух мальчиков равна  $1/4$ . В рассмотренном примере достаточно просто выбрать наиболее предпочтительный вариант опреде-

---

<sup>2</sup>Постулат Лапласа также называется постулатом Байеса–Лапласа.

ления основных исходов в конкретной ситуации<sup>3</sup>. Однако во многих других случаях задача определения множества основных исходов и доказательства того, что выбор этого множества наиболее правильный, может быть чрезвычайно сложной.

Даже в случаях, когда кажется, что выбор основных исходов очевиден, далеко не очевидно, что их вероятности одинаковы. Например, как быть со “смещенной” монетой? Можно принять основные исходы “орел” и “решка”, как в случае с идеальной монетой. Тогда очевидно, что назначение вероятностей  $1/2$  исходам “смещенной” монеты некорректно. Как понимать “одинаковую вероятность” исходов в этом случае?

В настоящее время существуют две основные интерпретации вероятности: 1 – *частотная* (вероятность события рассматривается как число, представляющее собой относительную частоту появления данного события); 2 – *субъективная* (вероятность события рассматривается как число, отражающее субъективное мнение или степень доверия к событию).

Частотная интерпретация достаточно просто объясняется. Например, вероятность того, что при подбрасывании монеты выпадет орел, равна  $1/2$ , так как ожидается, что если монету подбрасывать достаточно большое число раз, то примерно в половине случаев выпадет орел. Если мы говорим, что вероятность орла для “смещенной” монеты равна 0.6, то ожидается при большом количестве подбрасываний получить выпадение орла примерно в 60% подбрасываний. Частотная интерпретация также удовлетворяет свойству аддитивности вероятностей, что делает ее применение привлекательным и зачастую обоснованным. Вообще следует отметить, что большое число специалистов в прикладных областях используют в основном частотную интерпретацию вероятности.

Несмотря на простоту частотной интерпретации, существует ряд проблем, связанных с ее использованием в реальных задачах. Например, рассматривая монету, было от-

---

<sup>3</sup>В дальнейшем при анализе байесовского подхода будут показаны другие недостатки и противоречия при использовании одинаковых вероятностей в соответствии с постулатом Лапласа, или принципом максимума энтропии.

мечено, что она должна подбрасываться “достаточно большое число раз”. Однако возникает естественный вопрос, что понимать под словами “достаточно большое число раз”. Это 100 раз, 1000 раз, 10000 раз? Одновременно не совсем понятно с точки зрения точных расчетов, что означает выражение “примерно половина подбрасываний”. Заметим, что нельзя сказать “ровно половина подбрасываний”. Если подбрасывать монету нечетное число раз, то “ровно половина подбрасываний” не может быть никогда реализована. Даже если подбрасывать монету четное число раз, маловероятно, что выпадет “орел” ровно половину раз.

Проблема усложняется, если мы хотим определить, например, вероятность следующего события: “Атомная станция будет безопасно функционировать следующие 10 лет”. Такую вероятность достаточно сложно представить в терминах частотной интерпретации. Если без труда можно представить повторяющиеся подбрасывания монеты, то многократное повторение события безопасного функционирования атомной станции каждые пять лет просто невозможно представить и реализовать. Поэтому частотная интерпретация вероятности далеко не всегда может быть использована в практических задачах.

Частотная интерпретация рассматривает вероятность события как *объективное* свойство некоторой ситуации, характеризующее это событие. Другой, противоположной точкой зрения на вероятность является *субъективная* интерпретация, согласно которой вероятность – это просто число, приписанное событию некоторым субъектом (экспертом) в качестве его индивидуального субъективного представления о степени правдоподобия события или о степени уверенности в том, что событие произойдет. В этом случае возникает вопрос, почему эти числа должны подчиняться законам вероятностей. Имеется множество попыток ответить на этот вопрос. Одним из наиболее известных аргументов, позволяющих ответить на него, является интерпретация субъективных вероятностей в терминах *пари* (игры), первоначально предложенная Рамсеем [70]. Пусть имеется множество возможных исходов  $\Omega$  и подмножество  $U \subseteq \Omega$ . Рассмотрим субъекта (эксперта), который может оценить пари следующим образом: “Если  $U$  произошло,

т.е. если действительный исход принадлежит  $U$ , то я выигрываю  $100 \cdot (1 - \alpha)\$$ , в то время как, если  $U$  не произошло, то я теряю  $100 \cdot \alpha\$$ ". Здесь  $0 \leq \alpha \leq 1$ . В частности, предположим, что, когда предлагается два таких пари, субъект может всегда решить, какой из них он предпочитает, т.е. предполагается, что субъект имеет полностью упорядоченные по предпочтению пари. Обозначим одно из пари  $(U, \alpha)$ . Заметим, что  $(U, 0)$  означает, что субъект ничего не теряет вообще. В этом случае он выигрывает  $100\$$ , если  $U$  произошло, и теряет  $0\$$ , если  $U$  не произошло. Пари становится все менее привлекательным с ростом значения  $\alpha$ , так как субъект выигрывает все меньше, если  $U$  произошло, и теряет все больше, если  $U$  не произошло. Наихудший случай, когда  $\alpha = 1$ , так как  $(U, 1)$  означает, что субъект ничего не выиграет вообще, если  $U$  произошло, и теряет  $100\$$ , если  $U$  не произошло. Заметим, что пари  $(U^c, 1 - \alpha)$  имеет противоположные свойства, где  $U^c$  – дополнение  $U$ .

Теперь предположим, что субъект должен выбрать между  $(U, \alpha)$  и  $(U^c, 1 - \alpha)$ . Очевидно, что его предпочтение зависит полностью от  $\alpha$ . Будем считать субъекта *рациональным*, если его поведение (решение) удовлетворяет двум свойствам:

P1. Если пари  $(U, \alpha)$  гарантирует получение большего количества денег, чем пари  $(U, \beta)$ , то субъект предпочитает пари  $(U, \alpha)$  по отношению к  $(U, \beta)$ .

P2. Предпочтения являются транзитивными, т.е. если  $(U, \alpha)$  предпочтительнее  $(V, \beta)$  и  $(V, \beta)$  предпочтительнее  $(V^*, \gamma)$ , то  $(U, \alpha)$  предпочтительнее  $(V^*, \gamma)$ .

Из этих свойств следует, что если субъект рациональный<sup>4</sup>, то он предпочтет  $(U, \alpha)$  по отношению к  $(U^c, 1 - \alpha)$  при  $\alpha = 0$  и  $(U^c, 1 - \alpha)$  по отношению к  $(U, \alpha)$  при  $\alpha = 1$ . Используя свойство транзитивности, можно утверждать, что если рациональный субъект предпочитает  $(U, \alpha)$  по отношению к  $(U^c, 1 - \alpha)$ , то он также предпочитает  $(U, \alpha^*)$  по отношению к  $(U^c, 1 - \alpha^*)$  для всех  $\alpha^* \leq \alpha$ . Аналогично, если субъект предпочитает  $(U^c, 1 - \beta)$  по отношению к  $(U, \beta)$ , то он также предпочи-

---

<sup>4</sup>Необходимо отметить, что аналогичный подход для оценки отношения к риску лица, принимающего решение, и для построения функции полезности в дальнейшем будет использоваться в задачах принятия решений (см. раздел 7.5).



тает  $(U^c, 1 - \beta^*)$  по отношению к  $(U, \beta^*)$  для всех  $\beta^* \geq \beta$ . Пусть  $\alpha_U = \{\beta : \text{субъект предпочитает } (U, \beta) \text{ по отношению к } (U^c, 1 - \beta)\}$ . Нетрудно доказать, что субъект, удовлетворяющий свойствам P1 и P2, предпочитает  $(U, \alpha)$  по отношению к  $(U^c, 1 - \alpha)$  для всех  $\alpha < \alpha_U$  и предпочитает  $(U^c, 1 - \alpha)$  по отношению к  $(U, \alpha)$  для всех  $\alpha > \alpha_U$ .

Значение  $\alpha_U$  является некоторой мерой доверия (субъекта) к  $U$ . Чем вероятнее  $U$  по мнению субъекта, тем больше  $\alpha_U$ . Если субъект полагает, что  $U$  обязательно произойдет (т.е. он полагает, что исход, который произойдет, будет обязательно принадлежать подмножеству  $U$ ), то  $\alpha_U$  должно быть равно 1. Для любого  $\alpha > 0$  субъект должен предпочесть пари  $(U, \alpha)$  по отношению к  $(U^c, 1 - \alpha)$ , так как он чувствует, что, играя с  $(U, \alpha)$ , он гарантированно выиграет  $100 \cdot \alpha\%$ , в то время как, играя с  $(U^c, 1 - \alpha)$ , он гарантированно потеряет такое же количество денег.

Аналогично, если субъект абсолютно уверен, что  $U$  гарантированно не произойдет, то  $\alpha_U$  должно быть равно 0. Более того, можно показать, что если  $U_1$  и  $U_2$  – непересекающиеся множества, то рациональный субъект должен принять  $\alpha_{U_1 \cup U_2} = \alpha_{U_1} + \alpha_{U_2}$ . Другими словами, если выполняется условие  $\alpha_{U_1 \cup U_2} \neq \alpha_{U_1} + \alpha_{U_2}$ , то существует некоторое множество пари, которые субъект мог бы принять (основываясь на его общепринятых предпочтениях), но эти пари приведут к гарантированной потере денег. Такое множество пари в литературе, посвященной субъективным вероятностям, называется *Голландской книгой*<sup>5</sup>.

Все сказанное выше можно суммировать в виде следующего утверждения: *Если субъект удовлетворяет свойствам P1 и P2, то для каждого подмножества  $U$  множества  $\Omega$  существует такое число  $\alpha_U$ , что субъект предпочитает  $(U, \alpha)$  по отношению к  $(U^c, 1 - \alpha)$  для всех  $\alpha < \alpha_U$  и предпочитает  $(U^c, 1 - \alpha)$  по отношению к  $(U, \alpha)$  для всех  $\alpha > \alpha_U$ . Функция, определенная равенством  $p(U) = \alpha_U$ , является вероятностной мерой.*

Данное утверждение служит убедительным аргументом

---

<sup>5</sup>Dutch book (англ.). Это не книга в литературном смысле, а букмекерская книга учета ставок.

того, что если предпочтения субъекта могут быть выражены численно, они должны подчиняться всем правилам вероятностей. Однако беспокойство может вызывать тот факт, что субъективная интерпретация вероятности не накладывает никаких ограничений на субъективную уверенность субъекта, кроме требования удовлетворения аксиомам вероятности. В случае подбрасывания идеальной игральной кости, например, предположение о равных вероятностях каждого исхода кажется “правильным”. Необдуманно является для кого-то, кто поддерживает субъективную точку зрения, приписать вероятность 0.7 исходу “1” и вероятность 0.06 каждому из оставшихся пяти возможных исходов. Другими словами, возникает вопрос, следует ли учитывать при определении субъективных вероятностей ситуации, для которых можно применить принцип максимума энтропии или когда мы имеем исчерпывающую частотную информацию? На этот вопрос можно дать два стандартных ответа:

- 1) действительно, частотная информация и принцип максимума энтропии должны учитываться и использоваться, когда это возможно;
- 2) даже если они не учитываются, выбор исходных субъективных вероятностей будет в конечном счете сходиться к тем же вероятностям по мере накопления информации и значение, к которому они сходятся, будет в некотором смысле “правильным”.

Достаточно подробный обзор субъективных вероятностей можно найти в работах [1, 64, 72].

### **1.3. Независимость**

Предположим, что подбрасываются две различные монеты. Обычно считается, что исходы подбрасываний являются независимыми, т.е. если при бросании первой монеты выпадет орел, это событие не оказывает влияние на исход бросания второй монеты. А что можно сказать о независимости, если

подбрасывать одну и ту же монету дважды? Является ли второе подбрасывание независимым по отношению к первому? Обычно считается, что и в этом случае исходы независимы.

Если события  $U$  и  $V$  являются *независимыми*, то получение новых сведений о событии  $U$  не дает никакой информации о событии  $V$  и получение новых сведений о  $V$  не дает никакой информации о событии  $U$ . Другими словами,  $U$  и  $V$  являются независимыми в соответствии с мерой вероятностей  $p$ , если  $p(U|V) = p(U)$  и  $p(V|U) = p(V)$ . Однако что случится, если  $p(V) = 0$ ? В этом случае  $p(U|V)$  является неопределенной. Аналогично, если  $p(U) = 0$ , то  $p(V|U)$  является неопределенной. Тем не менее обычно предполагается, что  $U$  и  $V$  в этом случае также являются независимыми.

События  $U$  и  $V$  являются независимыми в соответствии с мерой вероятности  $p$ , если из условия  $p(V) \neq 0$  следует, что  $p(U|V) = p(U)$ , и из условия  $p(U) \neq 0$  следует также, что  $p(V|U) = p(V)$ . Это определение эквивалентно известному определению независимости, когда  $p(U \cap V) = p(U)p(V)$ .

Рассмотрим следующий пример. Предположим, что у нас есть монета, о которой известно, что она либо нормальная, либо с двумя орлами. Обе эти возможности равновероятны с вероятностями  $1/2$ . Затем монета подбрасывается два раза. Является ли событие выпадения орла в первом бросании независимым по отношению к событию выпадения орла во втором бросании? Можно предположить, что события действительно независимы. Однако если при первом подбрасывании выпал орел, то более вероятным является тот факт, что монета имеет двух орлов, а значит вероятность выпадения орла при втором подбрасывании выше. И наоборот, получив решку при первом подбрасывании, мы полностью уверены, что монета является нормальной и при втором подбрасывании вероятность орла равна  $1/2$ .

Таким образом, имеется один исход подбрасываний, если монета с двумя орлами. Этот исход имеет вероятность  $1/2$ , так как вероятность того, что монета с двумя орлами, равна  $1/2$ . Имеется 4 исхода подбрасываний, если монета является нормальной. Каждый из исходов имеет вероятность  $1/8$ . Вероятность того, что выпадет орел в первом подбрасывании

равна  $3/4$  (это случится один раз, если монета с двумя орлами, и в 2-х из 4-х случаев, если монета нормальная). Аналогично вычисляются вероятность  $3/4$  выпадения орла при втором подбрасывании и вероятность  $5/8$  двух орлов при двух подбрасываниях. Следовательно, условная вероятность выпадения двух орлов при условии, что при первом бросании выпал орел, равна  $(5/8)(3/4) = 5/6$ , что не равно  $(3/4)(3/4)$ . Подбрасывания монеты в данном примере являются условно независимы. Формальное определение условной независимости является непосредственным обобщением определения независимости.

События  $U$  и  $V$  являются *условно независимыми* в соответствии с мерой вероятности  $p$  при условии события  $V'$ , если из условия  $p(V \cap V') \neq 0$  следует, что  $p(U|V \cap V') = p(U|V)$ , и из условия  $p(U \cap V') \neq 0$  следует, что  $p(V|U \cap V') = p(V|V')$ .

## 1.4. Случайная величина

Предположим, что монета подбрасывается 5 раз и подсчитывается общее число выпадений орла. Число выпадений орла называется *случайной величиной* или *переменной*. Слово “случайная” подразумевает, что значение переменной для некоторой реализации подбрасываний нельзя заранее предсказать. Слово “переменная” подразумевает, что значения могут изменяться в определенных границах. Формально случайная переменная не является случайной и не является переменной.

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$  – произвольное вероятностное пространство. Случайная величина, или переменная  $X$ , есть измеримая функция  $X = X(\omega)$ , отображающая множество  $\Omega$  в множество действительных чисел  $\mathbb{R}$ , т.е. функция, для которой прообраз  $\{\omega : X(\omega) \in B\}$  любого борелевского множества  $B \subset \mathbb{R}$ , есть множество из  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}$ .

Если монета подбрасывается 5 раз, то множество возможных исходов определяется множеством из  $2^5$  последовательностей орла (О) и решки (Р). Пусть  $X$  – случайная величина, соответствующая числу выпадений орла в последовательности. Тогда, например, для последовательности (ОРРРО) можно записать  $X(\text{ОРРРО}) = 2$ .

Предположим, что необходимо определить вероятность трех орлов в последовательности из 5 подбрасываний монеты, т.е. мы хотим получить вероятность  $p(X = 3)$  того, что  $X = 3$ . Но ранее вероятность была определена только на множестве элементарных исходов, а не на множестве возможных значений случайной величины. Можно представить  $X = 3$  как некоторую “сокращенную” запись для множества элементарных исходов таких, что случайная величина  $X$  принимает значение 3, т.е.  $X = 3$  – “сокращенная” запись для  $\{\omega : X(\omega) = 3\}$ . Таким образом, если  $X$  – случайная величина, определенная на  $\Omega$ , одно из значений которой  $x$ , то  $X = x$  – “сокращенная” запись для  $\{\omega : X(\omega) = x\}$  и  $p(X = x)$  – вероятность того, что  $X$  принимает значение  $x$ .

Из определения случайной величины  $X$  следует, что

$$\{X < x\} = \{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}.$$

Поэтому на всей вещественной оси определена функция

$$F_X(x) = \Pr\{X < x\},$$

которая называется *функцией распределения* случайной величины  $X$  и имеет следующие свойства:

F1. Свойство монотонности: если  $x_1 \leq x_2$ , то выполняется неравенство  $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ .

F2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ .

F3. Свойство непрерывности слева: выполняется равенство  $\lim_{x \uparrow x_0} F_X(x) = F_X(x_0)$ .

Две случайные величины  $X$  и  $Y$  являются независимыми, если получение новых сведений об одной из величин не дает никакой информации о значении другой величины. Например, если подбрасывается “идеальная” монета, то число выпавших орлов в первых пяти подбрасываниях не зависит от числа орлов во вторых пяти подбрасываниях.

Пусть  $\mathcal{V}(X)$  – множество возможных значений случайной величины  $X$ . Случайные величины  $X$  и  $Y$  являются условно независимыми при условии  $Z$  в соответствии с распределением  $p$ , если для всех  $x \in \mathcal{V}(X)$ ,  $y \in \mathcal{V}(Y)$  и  $z \in \mathcal{V}(Z)$  событие  $X = x$  является условно независимым от  $Y = y$  при

условии  $Z = z$ . В более общем виде, если  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ ,  $\mathbf{Y} = \{Y_1, \dots, Y_m\}$  и  $\mathbf{Z} = \{Z_1, \dots, Z_k\}$  – множества случайных величин, то  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  являются условно независимыми при данном  $\mathbf{Z}$ , если  $X_1 = x_1 \cap \dots \cap X_n = x_n$  условно не зависит от  $Y_1 = y_1 \cap \dots \cap Y_m = y_m$  при условии  $Z_1 = z_1 \cap \dots \cap Z_k = z_k$  для всех  $x_i \in \mathcal{V}(X_i)$ ,  $y_j \in \mathcal{V}(Y_j)$  и  $z_h \in \mathcal{V}(Z_h)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $h = 1, \dots, k$ .

## 1.5. Математическое ожидание и дисперсия

Предположим, что имеется случайная величина, например прибыль некоторой фирмы. Какова приемлемая цена акций этой фирмы? Для ответа на этот вопрос необходимо определить, что означает слово “приемлемый”. Можно сказать, что приемлемой ценой является та, которая равна ожидаемому доходу фирмы в случае покупки акций. Но в этом случае мы заменяем одно нечетко определенное понятие “приемлемый” другим “ожидаемый”.

Предположим, что в случае хорошей конъюнктуры рынка фирма будет иметь доход 1000\$ в час, в случае средней конъюнктуры рынка фирма будет иметь доход 500\$, а в случае плохой конъюнктуры фирма вообще не получит доход. Какой же доход мы можем ожидать? 1000\$? Очевидно, что это максимум, который можно получить. Но если мы не абсолютные оптимисты, то не ожидаем получить такую сумму. Вполне вероятно, что мы вообще ничего не получим. Тогда зачем покупать акции? С интуитивной точки зрения количество ожидаемого дохода зависит от того, какие шансы для конъюнктуры рынка имеют место.

*Ожидаемое значение*  $\mathbb{E}_p X$  (или *математическое ожидание*) дискретной случайной величины  $X$ , заданной на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ , где  $\Omega$  является конечным и измеримым, определяется как

$$\mathbb{E}_p X = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) X(\omega).$$

Если случайная величина  $X$  является непрерывной и имеет функцию распределения  $F_X(x)$ , то математическое ожидание

можно записать как

$$\mathbb{E}_F X = \int_{\Omega} x dF_X(x).$$

Таким образом, ожидаемое значение случайной величины по существу есть “среднее” значение этой величины. Математическое ожидание случайной величины  $X$  может также рассматриваться как отдельное число, которое в некотором смысле описывает  $X$ . Однако единственное число не может полностью описывать функцию. Рассмотрим две случайные величины  $X_1$  и  $X_2$ , определенные на множестве исходов  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ . Пусть  $X_1(\omega_1) = X_1(\omega_2) = 50$ ,  $X_2(\omega_1) = 0$  и  $X_2(\omega_2) = 100$ . Предположим, что  $p$  – равномерное распределение на  $\Omega$ , так что  $p(\omega_1) = p(\omega_2) = 1/2$ . Очевидно, что  $\mathbb{E}_p(X_1) = \mathbb{E}_p(X_2) = 50$ . Хотя величины  $X_1$  и  $X_2$  имеют одно и то же математическое ожидание, их поведение совершенно различно.  $X_2$  имеет больший разброс значений, чем  $X_1$ .

*Дисперсия* случайной величины  $X$ , в соответствии с распределением  $p$ , есть мера того, на сколько разбросаны значения  $X(\omega)$  от  $\mathbb{E}_p(X)$ , и может рассматриваться как мера разброса. Если все элементы множества исходов измеримы, то дисперсия  $X$ , обозначаемая  $var_p(X)$ , определяется как

$$var_p(X) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega)(X(\omega) - \mathbb{E}_p(X))^2.$$

Дисперсию можно определить несколько иначе. Пусть  $Y$  – такая случайная величина, что  $Y(\omega) = (X(\omega) - \mathbb{E}_p(X))^2$ . Тогда  $var_p(X)$  является математическим ожиданием величины  $Y$ . Корень квадратный из дисперсии называется *среднеквадратическим отклонением*. Эта характеристика случайной величины используется намного чаще, чем дисперсия, так как имеет один и тот же порядок значений, что и сама случайная величина. Возвращаясь к примеру двух случайных величин  $X_1$  и  $X_2$  с одинаковыми математическими ожиданиями, можно достаточно просто получить  $var_p(X_1) = 2500$  и  $var_p(X_2) = 0$ . Отсюда среднеквадратические отклонения величин  $X_1$  и  $X_2$  равны соответственно 50 и 0.

Выше предполагалось, что случайная величина  $X$  является измеримой, т.е. для каждого элемента  $x \in \mathcal{V}(X)$  множество  $\{\omega : X(\omega) = x\}$  является измеримым. Как теперь определить математическое ожидание, если  $X$  не является измеримой? Первый путь в этом случае – это рассмотреть нижнюю  $\underline{\mathbb{E}}_p(X)$  и верхнюю  $\overline{\mathbb{E}}_p(X)$  границы математического ожидания, полученные заменой  $p$  на внутреннюю  $p_*$  и внешнюю  $p^*$  меры соответственно. Однако этот подход может иногда привести к противоречивым результатам [46]. Рассмотрим в качестве примера множество исходов  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$  и алгебру  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ . Имеется только одна мера вероятностей  $p$  на  $\mathcal{F}$ . Возьмем две случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  такие, что  $X_1(\omega_1) = X_1(\omega_2) = 1$ ,  $X_2(\omega_1) = 1$  и  $X_2(\omega_2) = 2$ . Очевидно, что  $\underline{\mathbb{E}}_p(X_1) = \overline{\mathbb{E}}_p(X_1) = 1$ . Однако  $\underline{\mathbb{E}}_p(X_2) = 0$ , так как  $p_*(\omega_1) = p_*(\omega_2) = 0$ . В то же время  $X_2(\omega) \geq X_1(\omega)$  для любых  $\omega \in \Omega$ . Мы получили некоторое противоречие:  $X_2 \geq X_1$ , а  $\underline{\mathbb{E}}_p(X_2) \leq \underline{\mathbb{E}}_p(X_1)$ .

Второй путь использует множества вероятностных мер или распределений. Определение математического ожидания для множеств вероятностей можно записать следующим образом. Если  $\mathcal{P}$  – множество вероятностей, такое что случайная величина  $X$  является измеримой для каждого распределения  $p \in \mathcal{P}$ , то определим множество математических ожиданий  $\mathbb{E}_{\mathcal{P}}(X) = \{\mathbb{E}_p(X) : p \in \mathcal{P}\}$ . Отсюда можно определить нижнюю  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{P}}(X)$  и верхнюю  $\overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{P}}(X)$  границы математического ожидания в соответствии с  $\mathcal{P}$  как

$$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{P}}(X) = \inf_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_p(X), \quad \overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{P}}(X) = \sup_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_p(X).$$

## 1.6. Интервальные вероятности

Несмотря на широкое применение теории вероятностей, имеется большое количество критических замечаний к вероятности как способу описания неопределенности. Отметим три наиболее общие из них: 1 – точная вероятность неприемлема для представления полного отсутствия информации; 2 – субъект может определить вероятности некоторых подмножеств множества возможных исходов, но он далеко не всегда готов определить вероятности всех подмножеств; 3 – субъект



может в принципе определить вероятности всех подмножеств множества возможных исходов, но использование этих вероятностей требует достаточно трудоемких вычислений. Следующие два примера позволяют пояснить сказанное.

Предположим, что имеется монета, которую один раз бросили. Существует два возможных исхода бросания – орел и решка. Если известно, что монета идеальная, то логично назначить вероятность  $1/2$  каждому исходу. Однако предположим, что монета имеет неизвестное “смещение”. Как представить отсутствие информации о смещении монеты? В соответствии с принципом максимума энтропии при отсутствии информации о том, как упадет монета, орел и решка равновероятны. Тогда “смещенная” монета ничем не отличается от идеальной, что не совсем корректно. Есть также возможность рассматривать “смещение” монеты как один их исходов, т.е. множество исходов имеет вид {“смещение”, орел, решка}. Но тогда как определить вероятность каждого исхода?

Предположим, что имеется непрозрачный мешок, содержащий 100 шаров, 30 из которых красные, а об оставшихся шарах лишь известно, что они могут быть голубыми и зелеными, хотя точная пропорция голубых и зеленых шаров неизвестна. Мы вынимаем случайным образом один шар из мешка и имеем три возможных исхода: красный, голубой и зеленый. Логично определить вероятность выбора красного шара 0.3, а вероятность выбора зеленого или голубого 0.7. Каковы вероятности отдельно зеленого и голубого шаров?

Имеются два соответствующих подхода для решения приведенных задач. В одном из них неполноту информации представляют не одним распределением вероятностей, а множеством распределений. Например, в примере со “смещенной” неизвестным образом монетой можно использовать множество распределений

$$\mathcal{P}_1 = \{(p_1, p_2) : p_1 \in [0, 1], p_1 + p_2 = 1\}.$$

Здесь  $p_1, p_2$  – вероятности орла и решки соответственно.

Аналогично для примера с шарами в мешке можно использовать множество распределений

$$\mathcal{P}_2 = \{(p_1, p_2, p_3) : p_1 = 0.3, p_2 + p_3 = 0.7\},$$

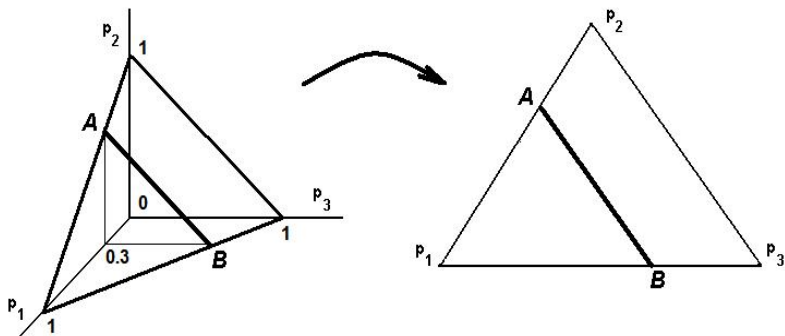


Рис. 1.1. Симплекс вероятностей с дополнительным ограничением  $p_1 = 0.3$

где  $p_1, p_2, p_3$  – вероятности красного, голубого и зеленого шаров соответственно.

Множества вероятностей при конечном числе исходов удобно геометрически изображать в виде единичного симплекса, размерность которого равна числу возможных исходов в множестве  $\Omega$ . Пусть число исходов равно  $n$ . Тогда симплекс обозначается  $S(1, n)$ . Например, если  $\Omega$  состоит из трех элементов, то симплекс  $S(1, 3)$  имеет вид, показанный на рис. 1.1, справа. Из рис. 1.1 видно, что симплекс  $S(1, 3)$  образуется как проекция плоскости  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ .

Каждая точка внутри единичного симплекса – некоторое распределение вероятностей. Вершины симплекса – распределения вероятностей вида  $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ . Любая дополнительная информация о распределении вероятностей отсекает на симплексе некоторую область, сокращая область возможных распределений. Если вернуться к примеру с шарами в непрозрачном мешке, то знание вероятности  $p_1 = 0.3$  ограничивает все множество распределений вероятностей  $(p_1, p_2, p_3)$  отрезком  $[A, B]$ , который находится от вершины  $p_1$  на расстоянии  $(1 - 0.3) = 0.7$ . Если было бы известно, что красных шаров не меньше 30, то мы бы имели ограничение  $p_1 \geq 0.3$ , что является значительно более “бедной” информацией, так как увеличивает количество возможных распределений вероятностей, которые показаны в виде темной

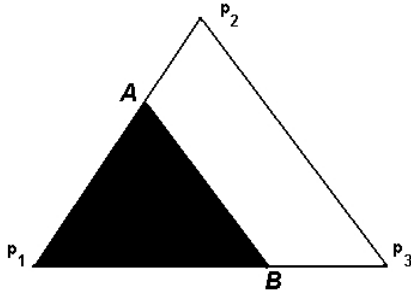


Рис. 1.2. Симплекс вероятностей с дополнительным ограничением  $p_1 \leq 0.3$

области на симплексе (рис. 1.2).

Во втором подходе только некоторые множества измеримы. Измеримые множества – это множества, для которых можно определить вероятности. Например, в случае с монетой можно рассмотреть алгебру событий  $\mathcal{F}$ , состоящую из пустого множества и множества {орел, решка}, так что орел и решка больше не являются измеримыми множествами. Очевидно, что существует только одна вероятность, определенная на данной алгебре, которую обозначим  $p$ . Таким образом, рассматривая эту алгебру, мы бы избежали необходимости определять вероятности орла и решки. Аналогично, в примере с шарами можно рассмотреть алгебру

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{\text{красный}\}, \{\text{голубой,зеленый}\}, \{\text{красный,голубой,зеленый}\}\}.$$

Существует вероятность  $p$ , определенная на этой алгебре, которая описывает ситуацию в примере. Если мы возьмем  $p(\text{красный}) = 0.3$ , то это определяет вероятности всех остальных подмножеств.

Приведенные примеры могут быть рассмотрены в терминах субъективных вероятностей и пари. Например, все, что можно сказать о вероятности выбора голубого шара, это то, что она находится в пределах от 0 до 0.7. Это соответствует предпочтению субъекта ( $\{\text{голубой}\}^c, 1 - \alpha$ ) по отношению к

({голубой},  $\alpha$ ) для  $\alpha > 0.7$ , но невозможностью для него выбрать между двумя пари для  $0 \leq \alpha \leq 0.7$ . Другими словами, обоснование использования множеств вероятностей вместо одной вероятности с точки зрения субъективной интерпретации может быть получено, если удалить предположение, что субъект имеет возможность всегда решить, какое из пари  $(U, \alpha)$  или  $(U^c, 1 - \alpha)$  следует предпочесть для произвольных  $U$  и  $\alpha$ .

Заметим, что в обоих подходах все, что можно сказать о вероятности выбора голубого шара, это то, что она находится в пределах от 0 до 0.7. Факт совпадения результатов для двух подходов не является случайным. Эти подходы в действительности очень близки. Пусть дано множество  $\mathcal{P}$  распределений вероятностей на множестве  $\Omega$  возможных исходов и  $U \subseteq \Omega$ . Определим *нижнюю*  $\underline{P}(U)$  и *верхнюю*  $\overline{P}(U)$  *вероятности*  $U$  как

$$\underline{P}(U) = \inf\{p(U) : p \in \mathcal{P}\},$$

$$\overline{P}(U) = \sup\{p(U) : p \in \mathcal{P}\},$$

где  $\inf$  и  $\sup$  означает в данном случае “наибольшую нижнюю границу” и “наименьшую верхнюю границу” соответственно. Например,  $\underline{P}(\text{голубой}) = 0$ ,  $\overline{P}(\text{голубой}) = 0.7$ , аналогичные границы для зеленого шара, а  $\underline{P}(\text{красный}) = \overline{P}(\text{красный}) = 0.3$ .

Если  $p$  – вероятность на  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$  и  $U \in \mathcal{F} - \mathcal{F}'$ , то  $p(U)$  является неопределенной, так как  $U$  не принадлежит области определения  $p$ . Можно продолжить  $p$  на  $\mathcal{F}$  двумя стандартными путями: определив функции  $p_*$  и  $p^*$ , называемые обычно *внутренней* и *внешней мерами*, образованными  $p$ . Для  $U \in \mathcal{F}$  получаем

$$p_*(U) = \inf\{p(V) : V \subseteq U, V \in \mathcal{F}'\},$$

$$p^*(U) = \sup\{p(V) : V \supseteq U, V \in \mathcal{F}'\}.$$

Если множество возможных исходов, а значит, и алгебра  $\mathcal{F}'$  являются конечными, то  $p_*$  – вероятность наибольшего измеримого множества в  $\mathcal{F}'$ , содержащегося в  $U$ , а  $p^*$  – вероятность наименьшего измеримого множества (в  $\mathcal{F}'$ ), содержащего  $U$ . Другими словами,  $p_*(U)$  может рассматриваться

как наилучшее приближение снизу для неизвестной вероятности  $U$ , а  $p^*(U)$  – как наилучшее приближение сверху для этой вероятности. Если  $U \in \mathcal{F}'$ , то достаточно просто увидеть, что  $p_*(U) = p^*(U) = p(U)$ . Если  $U \in \mathcal{F}' - \mathcal{F}'$ , то в общем случае  $p_*(U) \leq p^*(U)$ . Например,  $p_*(\text{голубой}) = 0$  и  $p^*(\text{голубой}) = 0.7$ , так как наибольшее измеримое множество, содержащееся в  $\{\text{голубой}\}$  – пустое множество, в то время как наименьшим измеримым множеством, содержащим  $\{\text{голубой}\}$ , является  $\{\text{голубой}, \text{зеленый}\}$ . Кроме того,  $p_*(\text{красный}) = p^*(\text{красный}) = 0.3$ .

В то время как вероятностная мера *аддитивна* в том смысле, что  $p(U \cup V) = p(U) + p(V)$ , внутренняя мера является *супераддитивной*, а внешняя – *субаддитивной*, так что

$$p_*(U \cup V) \geq p_*(U) + p_*(V),$$

$$p^*(U \cup V) \leq p^*(U) + p^*(V).$$

Кроме того, внутренняя и внешняя меры связаны между собой соотношением

$$p_*(U) = 1 - p^*(U).$$

Использование множеств распределений вероятностей и вычисление нижней и верхней вероятностей, а также использование обычной вероятностной меры, определенной на алгебре, которая необязательно включает все события и вычисления внутренней и внешней мер, являются двумя подходами, при помощи которых можно оперировать с неточностью и отсутствием информации. Следует отметить, что множества вероятностей являются более общим инструментом, охватывающим больше различных ситуаций, чем точные вероятности.

## 1.7. Заключение

Главная цель данной главы заключается в том, чтобы показать, во-первых, различные способы интерпретации вероятностей, во-вторых, различные способы описания неполноты информации. В то же время необходимо отметить, что

помимо рассмотренных способов описания неполноты информации существует целый ряд подходов, включая емкости Шоке, покрытия, функции доверия и правдоподобия Демпстера–Шейфера, теория возможностей и т.д. Сравнительный анализ различных подходов применительно к задачам принятия решений был выполнен в работах [16, 17, 34, 41, 47, 62, 131, 133, 136, 169]. Часть подходов будет описана в следующих главах. Наиболее всесторонне различные подходы к описанию неполноты информации исследованы в книге Халперна [46], некоторые элементы которых можно было найти в данной главе. Также необходимо отметить, что помимо рассмотренных способов интерпретации вероятностей существуют и другие способы, например логическая интерпретация [11, 50, 52]. Каждый способ имеет свои особенности и аргументы, обосновывающие его применение.

Другая цель данной главы заключается в том, чтобы кратко дать основные понятия теории вероятностей, которые могут пригодиться при последующем изложении именно в той трактовке, которая дана в данной главе. Дело в том, что существует огромное количество книг и учебников по теории вероятностей, рассматривающих основные понятия и определения теории вероятностей с различных точек зрения, делая акцент на определенных элементах теории. Поэтому здесь кратко рассмотрены только те понятия, которые применяются в дальнейшем в книге.

## Глава 2

### Теория свидетельств Демпстера–Шейфера

Тщательнее всего следует проверять правильность суждений, которые кажутся нам очевидными.

*Марк Твен*

#### 2.1. Основные определения теории Демпстера–Шейфера

*Теория Демпстера–Шейфера*<sup>1</sup>, также называемая математической теорией свидетельств<sup>2</sup>, теорией функций доверия<sup>3</sup> или теорией случайных множеств<sup>4</sup>, была предложена в работе Демпстера [24] и позднее развита в работе Шейфера [75] в качестве инструмента для моделирования и обработки неточных (интервальных) экспертных оценок, измерений или наблюдений.

Теория Демпстера–Шейфера использует математические объекты, называемые “функциями доверия”. Обычно их основная цель заключается в моделировании степени доверия некоторого субъекта к чему-либо. В то же время в литературе имеется большое количество интерпретаций функций доверия, которые могут использоваться в различных прикладных задачах. Как заметил Сметс [77], работа Демпстера [24] была

---

<sup>1</sup>Dempster-Shafer theory (англ.)

<sup>2</sup>Mathematical theory of evidence (англ.)

<sup>3</sup>Belief function theory (англ.)

<sup>4</sup>Theory of random sets (англ.)

посвящена многозначным отображениям и интервальным вероятностям и не была ориентирована в направлении моделирования субъективной степени доверия. Основной идеей Шейфера было использование математического аппарата, предложенного Демпстером, для того чтобы моделировать субъективную степень доверия. Однако Шейфер не доказывает и не обосновывает в своей основной книге [75] правомерность использования соответствующего математического аппарата. Впоследствии основная часть обоснований была сделана с использованием таких понятий, как случайные множества, многозначные отображения, нижние и верхние вероятности, которые в большей степени свойственны теории случайных множеств. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать функции доверия в основном с позиции теории случайных множеств.

*Случайные множества* – это множества, полученные случайно, т.е., говоря более или менее строго, случайное множество – это случайная величина, принимающая в качестве значений некоторые множества вместо точек.

Пусть  $\Omega$  – некоторое множество, которое в теории свидетельств иногда называется *универсальным множеством* или *фреймом различений*<sup>5</sup>. Предположим, что  $N$  наблюдений или измерений элемента  $\omega \in \Omega$  было получено в качестве информации об объекте, принимающем значения из  $\Omega$ . При этом предполагается, что результат измерений или наблюдений является неточным, т.е. представляет из себя некоторый интервал (подмножество)  $A$  значений  $\Omega$ . Пусть  $c_i$  означает количество наблюдаемых подмножеств  $A_i \subseteq \Omega$ , а  $\mathcal{Po}(\Omega)$  – множество всех подмножеств  $\Omega$ . Частотная функция  $m$ , называемая *базовой вероятностью*<sup>6</sup>, определяется как [24, 54, 75]:

$$m : \mathcal{Po}(\Omega) \rightarrow [0, 1], \quad m(\emptyset) = 0, \quad \sum_{A \in \mathcal{Po}(\Omega)} m(A) = 1.$$

Заметим, что область определения базовых вероятностей  $\mathcal{Po}(\Omega)$  отличается от области определения  $\Omega$  функции распределения вероятностей. Согласно [24], базовая вероятность

<sup>5</sup>frame of discernment (англ.)

<sup>6</sup>basic probability assignment (англ.)



может быть получена следующим образом:

$$m(A_i) = c_i/N. \quad (2.1)$$

Если  $m(A_i) > 0$ , т.е. подмножество  $A_i$  в качестве результата измерения или наблюдения было получено хотя бы один раз, то  $A_i$  называется *фокальным элементом*<sup>7</sup>.

Определим теперь функции доверия и правдоподобия. Согласно [75], *функция доверия*<sup>8</sup>, обозначаемая  $\text{Bel}(A)$ , и *функция правдоподобия*<sup>9</sup>, обозначаемая  $\text{Pl}(A)$ , события  $A \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  определяются как

$$\text{Bel}(A) = \sum_{A_i: A_i \subseteq A} m(A_i), \quad \text{Pl}(A) = \sum_{A_i: A_i \cap A \neq \emptyset} m(A_i). \quad (2.2)$$

Если известны функции доверия событий  $A_i$ , то базовые вероятности события  $A$  могут быть вычислены при помощи формулы инверсии Мёбиуса

$$m(A) = \sum_{A_i: A_i \subseteq A} (-1)^{|A-A_i|} \text{Bel}(A_i),$$

где  $|A|$  – мощность множества  $A$  (число элементов множества  $A$ ).

Как показано в работах [46, 47], функция доверия может быть формально определена как функция, удовлетворяющая аксиомам, являющимся ослабленным вариантом аксиом Колмогорова, характеризующих вероятность. Поэтому в некоторых случаях имеет смысл рассматривать функцию доверия (правдоподобия) как обобщенную вероятность, а доверие  $\text{Bel}(A)$  и правдоподобие  $\text{Pl}(A)$  как нижнюю и верхнюю вероятности события  $A$ , т.е.  $\text{Bel}(A) \leq \text{Pr}(A) \leq \text{Pl}(A)$ .

**Пример 2.1.** Имеются четыре кандидата на некоторую должность ( $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ ). После интервью 10 экспертов ( $N = 10$ ) пытаются определить наиболее вероятного кандидата. 5 экспертов ( $c_1 = 5$ ) считают, что первый кандидат ( $A_1 = \{1\}$ ) является наиболее предпочтительным, 2 эксперта ( $c_2 = 2$ ) считают, что первый или

<sup>7</sup>focal element (англ.)

<sup>8</sup>belief function (англ.)

<sup>9</sup>plausibility function (англ.)

второй кандидат ( $A_2 = \{1, 2\}$ ) является наиболее предпочтительным, 3 эксперта ( $c_3 = 3$ ) выбирают третьего кандидата ( $A_3 = \{3\}$ ). Используя (2.1), получим:

$$\begin{aligned} m(A_1) &= c_1/N = 0.5, & m(A_2) &= c_2/N = 0.2, \\ m(A_3) &= c_3/N = 0.3. \end{aligned}$$

Найдем нижнюю и верхнюю границы для вероятности первого кандидата ( $A = \{1\}$ ). Используя (2.2), получаем:

$$\text{Bel}(A) = m(A_1) = 0.5, \quad \text{Pl}(A) = m(A_1) + m(A_2) = 0.7.$$

Нижняя и верхняя границы для вероятности второго кандидата ( $A = \{2\}$ ):

$$\text{Bel}(A) = 0, \quad \text{Pl}(A) = m(A_2) = 0.2.$$

Нижняя и верхняя границы для вероятности третьего кандидата ( $A = \{3\}$ ):

$$\text{Bel}(A) = m(A_3) = 0.3, \quad \text{Pl}(A) = m(A_3) = 0.3.$$

Функции доверия и правдоподобия могут быть определены также в случае, если множество  $\Omega$  не является конечным, например  $\Omega$  может быть множеством всех вещественных чисел. В этом случае расчеты остаются такими же, как это видно из следующего примера.

**Пример 2.2.** Опрос экспертов по поводу будущей цены акций некоторого предприятия дал следующие результаты: 4 эксперта ( $c_1 = 4$ ) предоставили интервал  $A_1 = [30, 36]$ , 1 эксперт ( $c_2 = 1$ ) – интервал  $A_2 = [28, 40]$ , 5 экспертов ( $c_3 = 5$ ) предоставили интервал  $A_3 = [34, 38]$ . Определим функцию доверия и правдоподобия интервала  $A = [28, 32]$ . Так как  $N = c_1 + c_2 + c_3 = 10$ , то базовые вероятности каждого интервала имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} m(A_1) &= c_1/N = 0.4, & m(A_2) &= c_2/N = 0.1, \\ m(A_3) &= c_3/N = 0.5. \end{aligned}$$

Тогда

$$\text{Bel}(A) = 0, \quad \text{Pl}(A) = m(A_1) + m(A_2) = 0.5.$$

Следует отметить, что определение (2.1) может быть использовано, когда количество наблюдений  $N$  достаточно большое. Однако это условие может часто нарушаться. Если  $N$  является малым, то результаты расчетов получаются слишком рискованными, чтобы им доверять.

## 2.2. Функции доверия и множество полиномиальных моделей

Пусть  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$  – множество возможных исходов  $\omega_j$ . Совокупность  $N$  наблюдений, независимо выбранных из  $\Omega$  с одинаковыми вероятностями каждого исхода  $\Pr\{\omega_j\} = \theta_j$  для всех  $j = 1, \dots, K$ , где  $\theta_j \geq 0$  и  $\sum_{j=1}^K \theta_j = 1$ , составляет стандартную полиномиальную модель. Обозначим  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_K)$ . Пусть  $n_j$  – число наблюдений исхода  $\omega_j$  в  $N$  опытах, таких что  $n_j \geq 0$  и  $\sum_{j=1}^K n_j = N$ . При введенных предположениях случайные величины  $n_1, \dots, n_K$  имеют полиномиальное распределение, и функция правдоподобия, построенная на основе наблюдений  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_K)$ , имеет вид

$$L(\mathbf{n}|\theta) \propto \prod_{j=1}^K \theta_j^{n_j}.$$

Теперь предположим, что имеется множество  $N$  неточных наблюдений  $A_i \subseteq \Omega$  и  $c_i$  – число появлений подмножества  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Базовые вероятности подмножеств  $A_i$  вычисляются по формуле (2.1). Оказывается, что на основе данной информации можно построить конечное множество полиномиальных моделей.

Для построения множества полиномиальных моделей рассмотрим урновую модель. Предположим, что имеется  $K$  урн,  $\omega_1, \dots, \omega_K$ , содержащих шары с номерами  $1, \dots, K$  соответственно. Сначала случайным образом выбирается подмножество урн  $A_i$ , состоящее из  $l_i$  урн, такое что  $A_i = \{\omega_j : j \in J_i\}$ , т.е. подмножество урн  $A_i$  содержит шары с номерами из индексного множества  $J_i$ . Затем случайным образом вытаскиваются  $c_i$  шаров из урн с номерами из  $J_i$ . При этом нет никаких предпочтений по выбору шаров из урн, соответствующих  $A_i$ . Данная процедура повторяется  $n$  раз, т.е. для каждого фокального элемента. Что можно сказать о числе шаров с определенными номерами, вытасканных из урн? Очевидно, что не существует однозначного ответа, за исключением случая, когда все подмножества  $A_i$  состоят из одного элемента, так как выбор шара из урн, соответствующих подмножеству  $A_i$ , про-

изводится случайно. Таким образом, существует множество различных комбинаций номеров шаров. Предположим, что число таких комбинаций равно  $M$ , и обозначим  $k$ -й возможный вектор количества выбранных номеров шаров

$$\mathbf{n}^{(k)} = (n_1^{(k)}, \dots, n_K^{(k)}), k = 1, \dots, M,$$

где  $n_j^{(k)}$  – количество случайно выбранных шаров с номером  $j$ . Кроме того, обозначим вектор числа появлений  $c_i$  подмножества  $A_i$  как  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ . Если предположить, что все подмножества  $A_i$  выбраны независимо из множества  $\mathcal{P}o(\Omega)$  всех подмножеств  $\Omega$  и вероятность выбора шара из  $j$ -й урны равна  $\theta_j$ , то каждая комбинация шаров  $\mathbf{n}^{(k)}$  образует стандартную полиномиальную модель.  $M$  возможных комбинаций шаров образуют  $M$  полиномиальных моделей. При этом все модели равноправны в том смысле, что нельзя выбрать одну из них, как наиболее предпочтительную по отношению к другим моделям.

**Пример 2.3.** Предположим, что  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ , имеют место три фокальных элемента  $A_1 = \{\omega_1\}$ ,  $A_2 = \{\omega_1, \omega_2\}$ ,  $A_3 = \{\omega_2, \omega_3\}$  и  $c_1 = c_3 = 1$ ,  $c_2 = 2$ . Возможными комбинациями  $\mathbf{n}^{(k)}$  числа шаров являются (3100), (2200), (1300), (3010), (2110), (1210).

Так как существует множество векторов  $\mathbf{n}^{(k)}$ , то существует и множество различных функций правдоподобия  $L(\mathbf{n}^{(k)}|\theta)$ ,  $k = 1, \dots, M$ . Отсюда следует, что вероятность произвольного события  $A \subseteq \Omega$  зависит от  $\mathbf{n}^{(k)}$ , т.е. можно найти  $P(A|\mathbf{n}^{(k)})$ . Даже если бы условные вероятности  $P(A|\mathbf{n}^{(k)})$  для каждого события  $A$  в  $\Omega$  и для каждого вектора  $\mathbf{n}^{(k)}$  были бы точно известны, можно было бы найти только нижнюю и верхнюю границы вероятности события  $A$ , которые определяются как

$$\underline{P}(A|\mathbf{c}) = \min_{k=1, \dots, M} P(A|\mathbf{n}^{(k)}), \quad \bar{P}(A|\mathbf{c}) = \max_{k=1, \dots, M} P(A|\mathbf{n}^{(k)}).$$

В частном случае, когда все подмножества  $A_i$  содержат только один элемент,  $M = 1$  и

$$\underline{P}(A|\mathbf{c}) = P(A|\mathbf{n}^{(k)}), \quad \bar{P}(A|\mathbf{c}) = P(A|\mathbf{n}^{(k)}).$$

Так как векторы  $\mathbf{n}^{(k)}$  зависят от  $\mathbf{c}$ , то результирующие нижняя и верхняя вероятности (после минимизации и максимизации  $P(A|\mathbf{n}^{(k)})$ ) зависят от  $\mathbf{c}$  и будут обозначаться  $\underline{P}(A|\mathbf{c})$  и  $\overline{P}(A|\mathbf{c})$ .

Следует отметить, что все сказанное выше справедливо и для случая, когда  $\Omega$  – некоторый интервал вещественных чисел. В этом случае можно преобразовать множество  $\Omega$  с бесконечным числом элементов к конечному множеству. Действительно, пусть  $\{\mathbf{i}\} = \{(i_1, \dots, i_n, i_{n+1})\}$  – множество всех двоичных векторов, состоящих из  $n + 1$  элементов, таких что  $i_j \in \{0, 1\}$ . Для каждого вектора  $\mathbf{i}$  определим интервал  $B_k$  ( $k = 1, \dots, 2^{n+1}$ ) следующим образом:

$$B_k = \left( \bigcap_{j:i_j=1} A_j \right) \cap \left( \bigcap_{j:i_j=0} A_j^c \right), \quad i_j \in \mathbf{i}.$$

Здесь  $A_{n+1} = \Omega$ . Таким образом, множество  $\Omega$  разделено на конечное множество таких непересекающихся интервалов  $B_k$ , что  $B_1 \cup \dots \cup B_K = \Omega$ ,  $K = 2^{n+1}$ . Более того, каждый интервал  $A_i$  может быть представлен как объединение конечного числа интервалов  $B_k$ . Поэтому, ассоциируя каждый интервал  $B_k$  с урной, можно построить множество полиномиальных моделей, рассмотренных выше.

Заметим, что оценкой вероятности  $\theta_i$  выбора шара из  $i$ -й урны является отношение  $n_i^{(k)}/N$ . При этом данная оценка зависит от номера возможной реализации  $k$ . Пусть  $J$  – множество индексов элементов  $A$ , т.е.  $A = \{\omega_j : j \in J\}$ . Тогда вероятность  $P(A|\mathbf{n}^{(k)})$  события  $A$  при условии имеющихся данных  $\mathbf{n}^{(k)}$  равна  $\sum_{j \in J} n_j^{(k)}/N$ . Отсюда можно найти

$$\underline{P}(A|\mathbf{c}) = \min_{k=1, \dots, M} \sum_{j \in J} n_j^{(k)}/N, \quad \overline{P}(A|\mathbf{c}) = \max_{k=1, \dots, M} \sum_{j \in J} n_j^{(k)}/N.$$

Необходимо отметить, что количество шаров из  $A$  не может быть меньше, чем сумма всех шаров из подмножеств  $A_i \subseteq A$ , так как при выполнении условия  $A_i \subsetneq A$  шары из  $A_i$  могут быть выбраны также из урн, находящихся вне  $A$ . Поэтому

минимум суммы  $\sum_{j \in J} n_j^{(k)}$  достигается для комбинации шаров  $\mathbf{n}^{(k)}$ , выбранных из подмножеств  $A_i \subseteq A$ , и

$$\min_{k=1, \dots, M} \sum_{j \in J} n_j^{(k)} = \sum_{i: A_i \subseteq A} c_i.$$

Количество шаров из  $A$  не может быть больше, чем сумма всех шаров из таких подмножеств  $A_i$ , что  $A_i \cap A \neq \emptyset$ . Следовательно, справедливо равенство

$$\max_{k=1, \dots, M} \sum_{j \in J} n_j^{(k)} = \sum_{i: A_i \cap A \neq \emptyset} c_i.$$

Отсюда

$$\underline{P}(A|\mathbf{c}) = \sum_{i: A_i \subseteq A} c_i/N = \sum_{i: A_i \subseteq A} m(A_i) = \text{Bel}(A),$$

$$\overline{P}(A|\mathbf{c}) = \sum_{i: A_i \cap A \neq \emptyset} c_i/N = \sum_{i: A_i \cap A \neq \emptyset} m(A_i) = \text{Pl}(A).$$

Таким образом, получены функции доверия и правдоподобия, как нижняя и верхняя вероятности события  $A$ , на основе модифицированной схемы урн и шаров.

### 2.3. Функции доверия и случайные множества

Функцию доверия и функцию правдоподобия можно получить также в терминах многозначного отображения или случайных множеств. Рассмотрим вероятности  $P(\psi)$ , определенные на множестве  $\Psi$  (это множество наших наблюдений), которое связано с множеством  $\Omega$  (это множество возможных значений наших наблюдений) через многозначное отображение  $G: \Psi \rightarrow \mathcal{P}o(\Omega)$  (см. рис. 2.1). Тогда базовые вероятности вычисляются следующим образом [24]:

$$m(A_i) = P(\psi_i) = c_i/N, \quad \psi_i \in \Psi.$$

Это многозначное отображение выражает неточность измерения (наблюдения), которая определяется в процессе этих измерений (наблюдений). Другими словами, многозначное

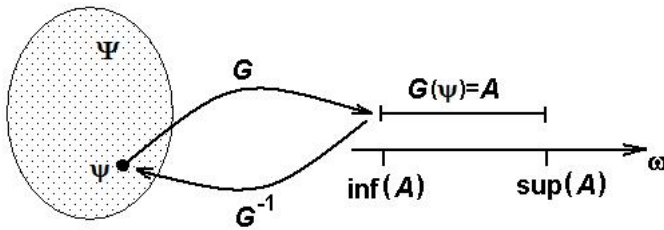


Рис. 2.1. Пример многозначного отображения

отображение выражает нашу неспособность приписать отдельное число каждому наблюдению. Для каждого множества  $A_i \in \mathcal{P}o(\Omega)$  значение базовой вероятности  $m(A_i)$  является вероятностью точки  $\psi_i = G^{-1}(A_i)$  ( $\psi_i \in \Psi$ ). *Случайное множество*<sup>10</sup> есть пара  $(\mathcal{F}, m)$ , где  $\mathcal{F}$  – семейство всех  $N$  фокальных элементов. Если множество  $\Omega$  является декартовым произведением  $k$  множеств, т.е.  $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_k$ , то вместо случайного множества имеем *случайное отношение*<sup>11</sup>.

Таким образом, в теории случайных множеств вместо подсчета появлений отдельных элементов множества  $\Omega$  подсчитываются наблюдения подмножеств  $A_i \subseteq \Omega$  и каждое наблюдение подмножества  $A_i \subseteq \Omega$  указывает, что событие имеет место где-то в  $A_i$  без конкретного определения вероятностей в каждой точке  $A_i$ . Любое распределение вероятностей с суммарным весом  $m(A_i)$  может быть определено на интервале (подмножестве)  $A_i$ , и все они равноправны в том смысле, что ни одно из них не может быть выбрано как наиболее предпочтительное без дополнительной информации.

Пусть  $A$  – произвольное подмножество множества  $\Omega$ , т.е.  $A \subseteq \Omega$ . Если определить  $X_*$  как подмножество  $\Psi$ , элементы которого *должны обязательно* вести через многозначное отображение  $G$  к  $A$ , т.е.

$$X_* = \{\psi \in \Psi : G(\psi) \subseteq A\},$$

то нижняя граница вероятности подмножества  $A$ , в соответ-

<sup>10</sup>random set (англ.)

<sup>11</sup>random relation (англ.)

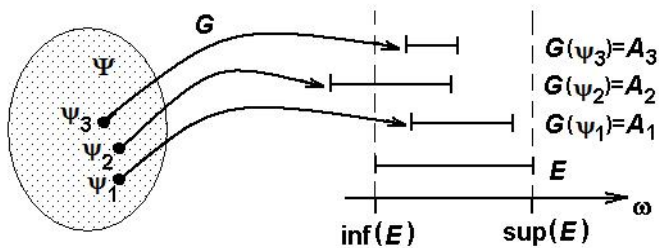


Рис. 2.2. Соотношение различных интервалов при многозначном отображении

ствии с принципом индуктивного вывода Демпстера [24], определяется как  $\underline{P}(A|\mathbf{c}) = P(X_*)$ . При этом

$$P(X_*) = \sum_{i:\psi_i \in X_*} P(\psi_i) = \sum_{i:G(\psi_i) \subseteq A} m(A_i) = \sum_{i:A_i \subseteq A} m(A_i).$$

Если определить  $X^*$  как подмножество  $\Psi$ , элементы которого *могут* вести через многозначное отображение  $G$  к  $A$ , т.е.

$$X^* = \{\psi \in \Psi : G(\psi) \cap A \neq \emptyset\},$$

то верхняя граница вероятности подмножества  $A$  определяется как  $\overline{P}(A|\mathbf{c}) = P(X^*)$ . При этом

$$\begin{aligned} P(X^*) &= \sum_{i:\psi_i \in X^*} P(\psi_i) = \sum_{i:G(\psi_i) \cap A \neq \emptyset} m(A_i) = \\ &= \sum_{i:A_i \cap A \neq \emptyset} m(A_i). \end{aligned}$$

Таким образом, для произвольного подмножества  $E \subset \Omega$  можно определить только нижнюю и верхнюю границы его вероятности. При этом нижняя граница  $\underline{P}(E|\mathbf{c})$  есть функция доверия  $\text{Bel}(E)$ , а верхняя граница  $\overline{P}(E|\mathbf{c})$  – функция правдоподобия  $\text{Pl}(E)$ .

**Пример 2.4.** В качестве иллюстрации сказанного рассмотрим пример многозначного отображения, показанного на рис. 2.2. Из



рис. 2.2 видно, что имеют место три интервала наблюдений  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ , которым соответствуют три точки на множестве  $\Psi$ . Таким образом, подмножеству  $E$  на  $\Omega$  соответствует подмножество  $X_* = \{\psi_1, \psi_3\}$ . Следовательно,

$$\text{Bel}(E) = \Pr(\{\psi_1, \psi_3\}) = P(\psi_1) + P(\psi_3) = m(A_1) + m(A_3).$$

Из рис. 2.2 также следует, что подмножеству  $E$  соответствует подмножество  $X^* = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \text{Pl}(E) &= \Pr(\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}) = P(\psi_1) + P(\psi_2) + P(\psi_3) = \\ &= m(A_1) + m(A_2) + m(A_3). \end{aligned}$$

## 2.4. Нижняя и верхняя функции распределения

Предположим, что множество  $\Omega$  является множеством или подмножеством всех действительных чисел, т.е.  $\Omega = \mathbb{R}$  или  $\Omega \subset \mathbb{R}$ . Кроме того, имеется множество наблюдаемых интервалов (фокальных элементов)  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , с базовыми вероятностями, определенными в (2.1). Если говорить о функциях доверия и правдоподобия как о нижней и верхней границах вероятности, то, рассматривая интервалы  $E_x = (-\infty, x]$ , можно построить нижнюю и верхнюю функции распределения вероятностей случайной величины, информация о которой дана в виде набора фокальных элементов  $A_i$  совместно с ненулевыми базовыми вероятностями  $m(A_i)$ .

Пусть  $\Omega$  – подмножество действительных чисел, ограниченных значениями  $\Omega_*$  и  $\Omega^*$ . Тогда нижняя  $\underline{F}$  и верхняя  $\overline{F}$  функции распределения вероятностей случайной величины  $X$ , о которой имеются данные в виде интервалов  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , принимают вид

$$\underline{F}(x) = \underline{P}(\{\omega \leq x\}) = \begin{cases} \sum_{i: \sup A_i \leq x} c_i/N, & x < \Omega^* \\ 1, & x = \Omega^* \end{cases},$$

$$\overline{F}(x) = \overline{P}(\{\omega \leq x\}) = \begin{cases} \sum_{i: \inf A_i \leq x} c_i/N, & x > \Omega_* \\ 0, & x = \Omega_* \end{cases}.$$

Эти функции распределения являются границами для всех возможных функций распределения, которые совместимы с имеющимися данными. Кроме того, получаемые грани-

цы являются ступенчатыми и могут рассматриваться в рамках аппарата “вероятностных блоков” или “р-блоков”<sup>12</sup>. Р-блоки<sup>13</sup> [13] – это класс всех распределений вероятностей, ограниченных некоторыми нижними и верхними функциями распределения. Как показано в работах [13, 60], каждая структура Демпстера–Шейфера однозначно определяет уникальную структуру р-блоков и каждая структура р-блоков имеет эквивалентный набор структур Демпстера–Шейфера.

Так как полученные функции распределения являются границами для всех возможных функций распределения случайной величины  $X$ , то можно вычислить нижнее и верхнее математические ожидания случайной величины  $X$ . При этом границы математического ожидания полностью определяются только граничными функциями распределения. Если  $X$  – непрерывная случайная величина, то

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{E}}X &= \int_{\Omega} \omega \frac{d\bar{F}(x)}{dx} d\omega = N^{-1} \sum_{i=1}^n c_i \cdot \inf A_i = \\ &= \sum_{i=1}^n m(A_i) \cdot \inf A_i, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}X &= \int_{\Omega} \omega \frac{dF(x)}{dx} d\omega = N^{-1} \sum_{i=1}^n c_i \cdot \sup A_i = \\ &= \sum_{i=1}^n m(A_i) \cdot \sup A_i. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Если случайная величина  $X$  является дискретной, то выражения для кумулятивных функций распределения и математических ожиданий остаются абсолютно такими же.

**Пример 2.5.** Предположим, что имеются шесть экспертных оценок ( $N = 6$ ) о возможных значениях случайной величины  $X$ , характеризующей стоимость акций некоторой фирмы в условных единицах на следующий день, которая может меняться в интервале

---

<sup>12</sup>р-boxes (англ.)

<sup>13</sup>Подробный анализ р-блоков и алгоритмы работы с ними можно найти в разделе 9.7.

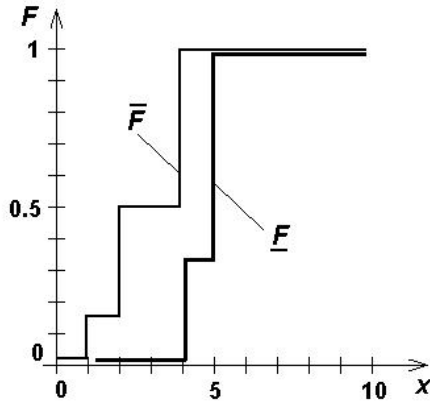


Рис. 2.3. Нижняя и верхняя функции распределения

$\Omega = [0, 10]$ . Три эксперта ( $c_1 = 3$ ) оценили интервал стоимости акций  $A_1 = [4, 5]$ , два эксперта ( $c_2 = 2$ ) предоставили интервал  $A_2 = [2, 4]$ , и один эксперт ( $c_3 = 1$ ) предоставил интервал  $A_3 = [1, 5]$ . Отсюда

$$m(A_1) = 1/2, \quad m(A_2) = 1/3, \quad m(A_3) = 1/6.$$

Графики нижней и верхней функций распределения показаны на рис. 2.3. Нижняя граница ожидаемой цены акций равна

$$\underline{\mathbb{E}}X = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 1 = 2.833,$$

а верхняя граница ожидаемой цены акций равна

$$\overline{\mathbb{E}}X = \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 = 4.667.$$

Если рассматривать функцию  $h(X)$  случайной величины  $X$ , то нижняя и верхняя границы математического ожидания функции  $h$  определяются на основе следующих выражений, обобщающих (2.3) и (2.4):

$$\underline{\mathbb{E}}h(X) = \sum_{i=1}^n m(A_i) \cdot \inf_{x \in A_i} h(x),$$

$$\overline{\mathbb{E}}h(X) = \sum_{i=1}^n m(A_i) \cdot \sup_{x \in A_i} h(x).$$

## 2.5. Основные отличия теории вероятностей и теории случайных множеств

Отметим основные отличия классической теории вероятностей и теории случайных множеств с точки зрения таких определяющих их понятий, как функция распределения и базовые вероятности.

Основное отличие между распределениями вероятностей и базовыми вероятностями заключается в том, что первые определены на множестве значений  $\Omega$ , а вторые определены на множестве всех подмножеств множества  $\Omega$ . Как следствие, базовые вероятности, функции доверия и правдоподобия имеют следующие свойства, отличающие их от элементов теории вероятностей.

1. В теории случайных множеств не требуется выполнения условия  $m(\Omega) = 1$ . В теории вероятностей условие  $\Pr(\Omega) = 1$  должно выполняться обязательно. Более того, если  $m(\Omega) = 1$ , то семейство всех фокальных элементов есть  $\mathcal{F} = \{\Omega\}$ , т.е. имеется единственный фокальный элемент и этим элементом является само множество  $\Omega$ . Это случай полного отсутствия какой-либо информации, и все возможные распределения вероятностей могут быть приписаны элементам множества  $\Omega$ . В рамках же теории вероятностей, согласно принципу максимума энтропии, для описания отсутствия какой-либо информации используется равномерное распределение на  $\Omega$ . Если имеется единственный фокальный элемент  $A \subset \Omega$ , то  $m(A) = 1$  и  $m(\Omega) = 0$ .

2. В теории случайных множеств не требуется выполнения условия  $m(A) \leq m(B)$ , если  $A \subseteq B$ , и наоборот. В теории вероятностей данное условие должно выполняться обязательно. Более того, в теории случайных множеств каждый фокальный элемент должен рассматриваться как объект сам по себе. Если выполняется неравенство  $m(A) \leq m(B)$ , то это лишь означает, что объект  $A$  имеет меньшую вероятность, чем объект  $B$ , но при этом совсем не обязательно выполнение условия  $A \subseteq B$ .

3. В теории случайных множеств нет слишком жесткой связи между базовыми вероятностями  $m(A)$  и  $m(A^c)$ , где  $A^c$

– дополнение к  $A$ . В теории вероятностей всегда имеет место равенство  $\Pr(A) = 1 - \Pr(A^c)$ .

В теории случайных множеств аналогами основных свойств теории вероятностей являются следующие:

1. Пусть  $\{A_i, i = 1, \dots, n\}$  – множество всех фокальных элементов. Тогда выполняется условие  $\sum_{i=1}^n m(A_i) = 1$ .

2. Для любого события  $A$  выполняются условия  $\text{Bel}(A) = 1 - \text{Pl}(A^c)$  и  $\text{Pl}(A) = 1 - \text{Bel}(A^c)$ .

## 2.6. Правила комбинирования свидетельств

Информация в виде различных наборов фокальных элементов с их базовыми вероятностями может быть получена из различных источников. Эти источники предоставляют различные данные об одном и том же объекте или явлении, но являются независимыми. Для комбинирования данных, полученных из независимых источников, используется ряд правил. При этом каждое правило имеет свои преимущества и недостатки. Достаточно детальный и критический обзор существующих правил комбинирования можно найти в работах [13, 74]. Поэтому рассмотрим только наиболее распространенные из них.

Предположим, что имеются два источника данных. Первый источник предоставляет  $N_1$  наблюдений (свидетельств)  $A_i^{(1)} \subseteq \Omega, i = 1, \dots, n_1$ , и  $c_i^{(1)}$  – число наблюдаемых множеств  $A_i^{(1)}, i = 1, \dots, n_1$ . Второй источник предоставляет  $N_2$  наблюдений (свидетельств)  $A_i^{(2)} \subseteq \Omega, i = 1, \dots, n_2$ , и  $c_i^{(2)}$  – число наблюдаемых множеств  $A_i^{(2)}, i = 1, \dots, n_2$ .

### 2.6.1. Правило комбинирования Демпстера

Правило комбинирования Демпстера основано на предположении, что источники данных абсолютно независимы. Обозначим базовые вероятности фокальных элементов, полученных из первого и второго источников, следующим образом:

$$m_1(A_i^{(1)}) = c_i^{(1)}/N_1, \quad m_2(A_j^{(2)}) = c_j^{(2)}/N_2.$$

Тогда комбинированная базовая вероятность ( $m_{12}$ ) вычисляется по формуле

$$m_{12}(A) = \frac{1}{1-K} \sum_{A_i^{(1)} \cap A_j^{(2)} = A} m_1(A_i^{(1)}) m_2(A_j^{(2)}),$$

где

$$K = \sum_{A_i^{(1)} \cap A_j^{(2)} = \emptyset} m_1(A_i^{(1)}) m_2(A_j^{(2)})$$

и  $m_{12}(\emptyset) = 0$ . Заметим, что если два фокальных элемента из разных источников не пересекаются, т.е.  $A_i^{(1)} \cap A_j^{(2)} = \emptyset$ , то соответствующие источники противоречат друг другу или конфликтуют. Например, если один эксперт считает, что температура воздуха на следующий день будет в интервале от 10 до 12 градусов, а другой эксперт полагает, что температура будет в пределах от 16 до 20 градусов, то становится очевидным, что экспертные оценки противоречивы или конфликтны, так как  $[10, 12] \cap [16, 20] = \emptyset$ . Конфликтность свидетельств учитывается коэффициентом  $K$ , который представляет собой общую базовую вероятность, связанную с конфликтными свидетельствами. Если все свидетельства противоречивы, т.е.  $K = 1$ , то полностью противоречивые источники не могут быть объединены при помощи правила комбинирования Демпстера.

**Пример 2.6.** Четыре предприятия ( $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ ) являются кандидатами для покупки акций. 5 экспертов из первой группы считают, что необходимо покупать акции первого предприятия; 3 эксперта из первой группы считают, что необходимо покупать акции второго или третьего предприятия; 8 экспертов из второй независимой группы считают, что необходимо покупать акции первого или второго предприятия; 7 экспертов из второй группы считают, что необходимо покупать акции третьего предприятия, и один эксперт из второй группы считает, что необходимо покупать акции четвертого предприятия. Первый источник:  $N_1 = 8$ ,  $c_1^{(1)} = 5$ ,  $A_1^{(1)} = \{1\}$ ,  $m_1(A_1^{(1)}) = 5/8$ ,  $c_2^{(1)} = 3$ ,  $A_2^{(1)} = \{2, 3\}$ ,  $m_1(A_2^{(1)}) = 3/8$ . Второй источник:  $N_2 = 16$ ,  $c_1^{(2)} = 8$ ,  $A_1^{(2)} = \{1, 2\}$ ,  $m_2(A_1^{(2)}) = 8/16$ ,  $c_2^{(2)} = 3$ ,  $A_2^{(2)} = \{3\}$ ,  $m_2(A_2^{(2)}) = 7/16$ ,  $c_3^{(2)} = 1$ ,  $A_3^{(2)} = \{4\}$ ,  $m_2(A_3^{(2)}) = 1/16$ . В табл. 2.1 представлены все возможные пересечения  $A_i^{(1)} \cap A_j^{(2)}$  фокальных элементов из двух источников.

Таблица 2.1. Данные, полученные из двух источников, и их пересечения

		$A_i^{(1)}$	
		{1}	{2, 3}
$A_i^{(2)}$	{1, 2}	{1}	{2}
	{3}	$\emptyset$	{3}
	{4}	$\emptyset$	$\emptyset$

Коэффициент конфликтности  $K$  вычисляется, исходя из того что  $A_1^{(1)} \cap A_2^{(2)} = \emptyset$ ,  $A_1^{(1)} \cap A_3^{(2)} = \emptyset$ ,  $A_2^{(1)} \cap A_3^{(2)} = \emptyset$  (см. в табл. 2.1 клетки с элементами “ $\emptyset$ ”), т.е.

$$\begin{aligned}
 K &= m_1(A_1^{(1)})m_2(A_2^{(2)}) + m_1(A_1^{(1)})m_2(A_3^{(2)}) + \\
 &+ m_1(A_2^{(1)})m_2(A_3^{(2)}) = \\
 &= \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{16} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{16} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{16} = 0.336
 \end{aligned}$$

Отсюда  $1 - K = 1 - 0.336 = 0.664$ . Из табл. 2.1 также видно, что непустые пересечения имеют вид {1}, {2}, {3}. Тогда

$$m_{12}(\{1\}) = m_1(A_1^{(1)})m_2(A_1^{(2)})/0.664 = 0.4706,$$

$$m_{12}(\{2\}) = m_1(A_2^{(1)})m_2(A_1^{(2)})/0.664 = 0.2824,$$

$$m_{12}(\{3\}) = m_1(A_2^{(1)})m_2(A_2^{(2)})/0.664 = 0.2470.$$

Из полученных базовых вероятностей можно вычислить функции доверия и правдоподобия:

$$\text{Bel}(\{1\}) = m_{12}(\{1\}) = \text{Pl}(\{1\}) = 0.4706,$$

$$\text{Bel}(\{2\}) = m_{12}(\{2\}) = \text{Pl}(\{2\}) = 0.2824,$$

$$\text{Bel}(\{3\}) = m_{12}(\{3\}) = \text{Pl}(\{3\}) = 0.2470.$$

В отзыве на книгу Шейфера “Математическая теория свидетельств” Заде представил пример, показывающий, что правило комбинирования Демпстера может давать “некорректные” результаты в случае большого количества противоречивых данных. Представим, что пациент осматривается двумя врачами-терапевтами по поводу неврологических симптомов. Первый врач уверен, что у пациента либо менингит с вероятностью 0.99, либо опухоль мозга с вероятностью 0.01. Второй

врач уверен, что у пациента расстройство нервной системы после сотрясения с вероятностью 0.99, но допускает опухоль мозга с вероятностью 0.01. Комбинируя полученные свидетельства при помощи правила Демпстера, получаем равенство

$$\text{Bel}(\text{опухоль}) = m(\text{опухоль}) = 1.$$

Следовательно, результат комбинирования поддерживает полностью диагноз, который оба врача рассматривают как очень маловероятный. Необходимо отметить, что причиной такого результата является предположение о том, что источники абсолютно надежны и предоставляют верные сведения. Поэтому при наличии противоречивых оценок из различных источников правило Демпстера “ищет” то общее, что имеется в обоих источниках, и “отбрасывает” все, что различается в них.

### 2.6.2. Правило дисконтирования

Как было отмечено выше, правило комбинирования Демпстера предполагает абсолютную надежность источников информации. Однако существует всегда сомнение, что источники абсолютно надежны. Для того чтобы учесть надежность источников, Шейфер предложил использование дисконтирования базовых вероятностей некоторым коэффициентом  $\alpha \in [0, 1]$ , характеризующим надежность источника, т.е. умножения базовой вероятности на  $\alpha$ . В результате для каждого фокального элемента  $A$  получаем новые базовые вероятности  $m^\alpha(A) = (1 - \alpha)m(A)$ . Если коэффициент дисконтирования равен 1, то источник является абсолютно ненадежным и  $m^\alpha(A) = 0$ . Наоборот, если  $\alpha = 0$ , то источник является абсолютно надежным и  $m^\alpha(A) = m(A)$ . Чтобы выполнить условие нормирования базовых вероятностей (сумма базовых вероятностей всех фокальных элементов равна 1), при дисконтировании добавляется базовая вероятность всего множества  $\Omega$ , т.е.  $m^\alpha(\Omega) = \alpha + (1 - \alpha)m(\Omega)$ . Фактически добавление ненулевой базовой вероятности  $\Omega$  не меняет информации, имеющейся в распоряжении. Если эксперт говорит, что “любой элемент



$\Omega$ ” может быть “истинным” значением случайной величины, то он не дает никакой дополнительной информации.

Интересно отметить, что использование дисконтирования даже при очень малых значениях  $\alpha$  делает коэффициент  $K$  в правиле комбинирования Демпстера не равным 1 и, следовательно, позволяет всегда найти комбинированную оценку независимо от количества противоречивой информации<sup>14</sup>.

**Пример 2.7.** Вернемся к предыдущему примеру о покупке акций четырех предприятий. 100 экспертов из первой группы считают, что необходимо покупать акции второго предприятия; 60 экспертов из первой группы считают, что необходимо покупать акции второго или третьего предприятия; 8 экспертов из второй независимой группы считают, что необходимо покупать акции первого. Первый источник:  $N_1 = 160$ ,  $c_1^{(1)} = 100$ ,  $A_1^{(1)} = \{2\}$ ,  $m_1(A_1^{(1)}) = 100/160$ ,  $c_2^{(1)} = 60$ ,  $A_2^{(1)} = \{2, 3\}$ ,  $m_1(A_2^{(1)}) = 60/160$ . Второй источник:  $N_2 = 8$ ,  $c_1^{(2)} = 8$ ,  $A_1^{(2)} = \{1\}$ ,  $m_2(A_1^{(2)}) = 1$ . Нетрудно увидеть, что

$$K = m_1(A_1^{(1)})m_2(A_1^{(2)}) + m_1(A_2^{(1)})m_2(A_1^{(2)}) = 1.$$

Следовательно, невозможно получить комбинированную оценку, используя правило комбинирования Демпстера. Поэтому используем правило дисконтирования с учетом надежности источников. Так как первый источник содержит намного больше экспертов, чем второй, то можно считать его более надежным по сравнению с первым источником<sup>15</sup>. Примем  $\alpha_1 = 1 - 160/168 = 0.048$  и  $\alpha_2 = 1 - 8/168 = 0.952$ . Заметим, что вовсе не обязательно, чтобы сумма коэффициентов дисконтирования была бы равна 1. Тогда

$$m_1^{\alpha_1}(A_1^{(1)}) = (1 - \alpha_1) \cdot 100/160 = 0.595,$$

$$m_1^{\alpha_1}(A_2^{(1)}) = (1 - \alpha_1) \cdot 60/160 = 0.357,$$

$$m_1^{\alpha_1}(\Omega) = \alpha_1 = 0.048,$$

---

<sup>14</sup>Одной из причин этого факта является ненулевая базовая вероятность  $\Omega$ . С одной стороны, оценка  $\Omega$  не дает никакой дополнительной информации. С другой стороны, она размывает конечный результат и за счет этого делает его более осторожным.

<sup>15</sup>Подход для анализа коэффициентов дисконтирования, используемый в примере, основан на подсчете относительного соотношения количества оценок каждого источника. Этот подход не является строгим с математической точки зрения, но может применяться в тех случаях, когда нет никакой дополнительной информации о надежности источников.

$$m_2^{\alpha_2}(A_1^{(2)}) = (1 - \alpha_2) \cdot 1 = 0.048,$$

$$m_2^{\alpha_2}(\Omega) = \alpha_2 = 0.952.$$

Теперь можно использовать правило комбинирования Демпстера, согласно которому

$$\begin{aligned} K &= m_1^{\alpha_1}(A_1^{(1)})m_2^{\alpha_2}(A_1^{(2)}) + m_1^{\alpha_1}(A_2^{(1)})m_2^{\alpha_2}(A_1^{(2)}) = \\ &= 0.595 \cdot 0.048 + 0.357 \cdot 0.048 = 0.046, \end{aligned}$$

$$1 - K = 0.954,$$

$$\begin{aligned} m_{12}(\{1\}) &= m_1^{\alpha_1}(\Omega)m_2^{\alpha_2}(A_1^{(2)})/(1 - K) = \\ &= 0.048 \cdot 0.048/0.954 = 0.002, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{12}(\{2\}) &= m_1^{\alpha_1}(A_1^{(1)})m_2^{\alpha_2}(\Omega)/(1 - K) = \\ &= 0.595 \cdot 0.952/0.954 = 0.594, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{12}(\{2, 3\}) &= m_1^{\alpha_1}(A_2^{(1)})m_2^{\alpha_2}(\Omega)/(1 - K) = \\ &= 0.357 \cdot 0.952/0.954 = 0.356, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{12}(\Omega) &= m_1^{\alpha_1}(\Omega)m_2^{\alpha_2}(\Omega)/(1 - K) = \\ &= 0.048 \cdot 0.952/0.954 = 0.048. \end{aligned}$$

Следует отметить, что

$$m_{12}(\{1\}) + m_{12}(\{2\}) + m_{12}(\{2, 3\}) + m_{12}(\Omega) = 1.$$

Найдем функции доверия и правдоподобия для всех предприятий

$$\text{Bel}(\{1\}) = m_{12}(\{1\}) = 0.002,$$

$$\text{Pl}(\{1\}) = m_{12}(\{1\}) + m_{12}(\Omega) = 0.05,$$

$$\text{Bel}(\{2\}) = m_{12}(\{2\}) = 0.594,$$

$$\text{Pl}(\{2\}) = m_{12}(\{2\}) + m_{12}(\{2, 3\}) + m_{12}(\Omega) = 0.998,$$

$$\text{Bel}(\{3\}) = 0, \text{Pl}(\{3\}) = m_{12}(\{2, 3\}) + m_{12}(\Omega) = 0.404,$$

$$\text{Bel}(\{4\}) = 0, \text{Pl}(\{4\}) = m_{12}(\Omega) = 0.048.$$

### 2.6.3. Правило комбинирования Ягера

Одной из альтернатив рассмотренным выше правилам является правило предложенное Ягером [144]. Он отметил, что важным положительным свойством ряда правил комбинирования свидетельств является их способность модифицировать уже комбинированную структуру, когда появляется новая информация. Это свойство также называется ассоциативностью правил. В то же время во многих случаях именно отсутствие этого свойства имеет положительные стороны. Например, арифметическое среднее, как правило комбинирования, не является ассоциативным в том смысле, что, имея в распоряжении некоторое среднее, нельзя его модифицировать при получении новой статистической информации. Однако арифметическое среднее можно модифицировать, добавляя новые точечные данные к сумме уже существующих данных и разделив новую сумму на общее число данных. Это свойство называется квазиассоциативностью, на основе которого Ягер разработал правило комбинирования свидетельств.

Ягер ввел так называемую комбинированную “универсальную” вероятность  $q$ , определяемую как

$$q(A) = \sum_{B \cap C = A} m_1(B)m_2(C),$$

где  $A$  – пересечение подмножеств  $B \in \mathcal{P}o(\Omega)$  и  $C \in \mathcal{P}o(\Omega)$ .

Комбинированная вероятность  $q$  может использоваться для любого числа свидетельств. Пусть  $m_1, \dots, m_n$  – базовые вероятности  $n$  источников данных и  $F_i$  – множество фокальных элементов, соответствующих  $i$ -му источнику данных, а  $A_k^{(i)}$  – один из элементов  $F_i$ . Тогда правило комбинирования определяется как

$$q(A) = \sum_{A_i^{(1)} \cap A_j^{(2)} \cap \dots \cap A_k^{(n)} = A} m_1(A_i^{(1)})m_2(A_j^{(2)}) \dots m_n(A_k^{(n)}).$$

Одним из очевидных отличий правила комбинирования Ягера от ранее рассмотренных правил является отсутствие коэффициента нормализации  $1 - K$ . В правиле комбинирования Ягера его удалось избежать благодаря тому, что комбинированная вероятность  $q$  пустого множества может быть

больше 0, т.е.  $q(\emptyset) \geq 0$ . При этом  $q(\emptyset)$  вычисляется абсолютно так же как коэффициент конфликтности источников  $K$  в правиле комбинирования Демпстера. Затем Ягер добавляет значение  $q(\emptyset)$  к комбинированной “универсальной” вероятности  $q(\Omega)$  всего множества  $\Omega$  для получения комбинированной базовой вероятности

$$m_{\text{Yag}}(\Omega) = q(\Omega) + q(\emptyset).$$

Следовательно, вместо нормализации с учетом противоречивости источников, как это было сделано в правиле комбинирования Демпстера, Ягер переносит противоречивость, или конфликтность, свидетельств на все множество  $\Omega$ . При этом базовая вероятность  $m_{\text{Yag}}(\Omega)$  может теперь интерпретироваться как степень незнания или неопределенности.

Базовые вероятности для других множеств определяются как

$$m_{\text{Yag}}(\emptyset) = 0, \quad m_{\text{Yag}}(A) = q(A), \quad A \neq \emptyset, \quad A \neq \Omega.$$

Базовые вероятности, полученные с использованием правила комбинирования Демпстера, могут быть выражены через комбинированные “универсальные” вероятности  $q$ , полученные на основе правила комбинирования Ягера, следующим образом:

$$\begin{aligned} m(\emptyset) &= 0, & m(\Omega) &= q(\Omega)/(1 - q(\emptyset)), \\ m(A) &= q(A)/(1 - q(\emptyset)), \end{aligned}$$

где  $A \neq \emptyset, A \neq \Omega$ .

**Пример 2.8.** Вернемся снова к примеру о покупке акций четырех предприятий. Так как  $q(\emptyset)$  вычисляется абсолютно так же как коэффициент противоречивости, или конфликтности,  $K$  в правиле Демпстера, то  $q(\emptyset) = 0.336$ . Отсюда

$$\begin{aligned} m_{\text{Yag}}(\{1\}) &= q(\{1\}) = m_1(A_1^{(1)})m_2(A_1^{(2)}) = \\ &= \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{16} = 0.3125, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{Yag}(\{2\}) &= q(\{2\}) = m_1(A_2^{(1)})m_2(A_1^{(2)}) = \\
&= \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{16} = 0.1875,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{Yag}(\{3\}) &= q(\{3\}) = m_1(A_2^{(1)})m_2(A_2^{(2)}) = \\
&= \frac{3}{8} \cdot \frac{7}{16} = 0.1641,
\end{aligned}$$

$$q(\Omega) = 0, \quad m_{Yag}(\Omega) = q(\Omega) + q(\emptyset) = 0.336.$$

Из полученных базовых вероятностей можно вычислить функции доверия и правдоподобия:

$$\begin{aligned}
\text{Bel}(\{1\}) &= m_{Yag}(\{1\}) = 0.3125, \\
\text{Pl}(\{1\}) &= m_{Yag}(\{1\}) + m_{Yag}(\Omega) = 0.6485,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Bel}(\{2\}) &= m_{Yag}(\{2\}) = 0.1875, \\
\text{Pl}(\{2\}) &= m_{Yag}(\{2\}) + m_{Yag}(\Omega) = 0.5235,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Bel}(\{3\}) &= m_{Yag}(\{3\}) = 0.1641, \\
\text{Pl}(\{3\}) &= m_{Yag}(\{3\}) + m_{Yag}(\Omega) = 0.5.
\end{aligned}$$

#### 2.6.4. Параметрическое семейство правил комбинирования Инагаки

Используя особенности правил комбинирования Демпстера и Ягера, Инагаки [49] предложил параметрическое семейство правил. При этом он ввел такую функцию  $f(A)$ , что для непустого множества  $A$  можно записать комбинированную базовую вероятность в виде

$$m(A) = q(A) + f(A) \cdot q(\emptyset)$$

и

$$\sum_{A \subset \Omega, A \neq \emptyset} f(A) = 1, \quad f(A) \geq 0.$$

Функцию  $f$  можно интерпретировать как функцию масштаба для  $q(\emptyset)$ , и степень конфликта определяется параметром  $k = f(A)/q(A)$ . Инагаки ограничил класс правил комбинирования условием

$$\frac{m(A)}{m(C)} = \frac{q(A)}{q(C)}, \quad A, C \neq \emptyset, \quad A, C \neq \Omega.$$

Сохранение отношения между  $m$  и  $q$  означает, что нет каких-либо “метасведений” о надежности или качестве источников информации или экспертов. Если применить некоторый весовой множитель к свидетельствам на основе какой-либо дополнительной информации об источниках, то это изменит приведенное отношение и равенство не будет выполняться. Поэтому правило Инагаки может быть применено только в случае отсутствия какой-либо информации об источниках.

Если теперь обозначить комбинированную базовую вероятность  $m_{\text{In}}$ , то преобразование приведенных выше выражений дает следующие результаты:

$$m_{\text{In}}(A) = [1 + kq(\emptyset)]q(A), \quad A \neq \emptyset, \quad A \neq \Omega,$$

$$m_{\text{In}}(\Omega) = [1 + kq(\emptyset)]q(\Omega) + [1 + kq(\emptyset) - k]q(\emptyset),$$

$$0 \leq k \leq \frac{1}{1 - q(\emptyset) - q(\Omega)}.$$

Параметр  $k$  используется для нормализации, и его задание является важным этапом при реализации правила комбинирования, хотя обоснованные подходы для выбора  $k$  отсутствуют в литературе. Если  $k = 0$ , то правило комбинирования Инагаки совпадает с правилом Ягера. Если  $k = 1/(1 - q(\emptyset))$ , то получаем правило комбинирования Демпстера. Таким образом, правило комбинирования Инагаки можно рассматривать как параметрическое семейство правил с параметром  $k$ .

## 2.7. Заключение

Теория Демпстера–Шейфера является достаточно мощным инструментом для моделирования неточности и неопределенности. Она позволяет моделировать полное отсутствие исходной информации. Функции доверия и правдоподобия некоторого события можно рассматривать как верхнюю и нижнюю границы вероятности этого события. С этой точки зрения теория Демпстера–Шейфера не является альтернативой теории вероятностей, а дополняет и обобщает ее.

Несмотря на ряд достоинств рассмотренной теории, она моделирует только определенный вид исходной информации.

Кроме того, определение базовых вероятностей с использованием правила (2.1) может привести к противоречивым результатам в задачах принятия решений. Одной из причин этого является тот факт, что возможное отсутствие априорной информации (наблюдения, оценки) для части элементов универсального множества  $\Omega$  делает функции доверия и правдоподобия этих элементов нулевыми. Это говорит о том, что появление таких элементов абсолютно невозможно, что в большинстве практических задач является неверным и обусловлено ограниченностью выборки. Если при большом числе наблюдений определенная часть элементов множества  $\Omega$  никак бы не проявлялась, то можно говорить о нулевой вероятности появления этих элементов. Однако для ограниченной выборки данное утверждение является слишком рискованным. Интересно отметить, что единичный коэффициент конфликтности в правиле комбинирования Демпстера также является следствием отмеченного недостатка. Поэтому для устранения отмеченных недостатков требуются новые методы описания неопределенности и неточности, а также модификации теории Демпстера–Шейфера, которые будут рассмотрены ниже.

## Глава 3

### Элементы теории возможностей

В этом мире нет гарантий, есть только возможности.

*Дуглас Макартур*

#### 3.1. Нечеткие множества

Нечеткие множества и теория нечетких множеств были предложены Заде [145] в целях моделирования или математического описания нечеткости, неточности и неопределенности многих лингвистических выражений обычного языка, которые постоянно используются экспертами в качестве оценок или суждений.

*Нечеткое множество*<sup>1</sup>  $F$  на универсальном множестве  $\Omega$  определяется *функцией принадлежности*<sup>2</sup>  $\mu_F : \Omega \rightarrow [0; 1]$ , и  $\mu_F(\omega)$  есть степень того, насколько элемент  $\omega$  множества  $\Omega$  принадлежит множеству  $F$ .

Множество  $\Omega$  в теории нечетких множеств называется *носителем* нечеткого множества и само по себе нечетким не является. Нечеткое множество полностью определяется соответствующей функцией принадлежности, и наоборот, т.е. задание нечеткого подмножества  $F$  эквивалентно заданию его функции принадлежности  $\mu_F$ . Оно также вырождается в обычное множество, если его функция принадлежности принимает только значения 0 и 1.

Нечеткое множество  $F$  называется *нормальным*, если  $\sup_{\omega} \mu_F(\omega) = 1$ . Множеством  $\alpha$ -уровня нечеткого множества

---

<sup>1</sup>Fuzzy set (англ.)

<sup>2</sup>Membership function (англ.)



$F$  называется обычное множество, определяемое как

$$F_\alpha = \{\omega \in \Omega, \mu_F(\omega) \geq \alpha\}.$$

Тогда для любого  $\omega \in \Omega$  можно записать условие

$$\mu_F(\omega) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \min(\alpha, \mu_{F_\alpha}(\omega)).$$

Пусть нечеткие множества  $F_1, \dots, F_r$  определены на множествах  $\Omega_1, \dots, \Omega_r$  и характеризуются функциями принадлежности  $\mu_{F_1}(\omega_1), \dots, \mu_{F_r}(\omega_r)$  соответственно. Пусть также  $f$  – отображение из  $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_r$  во множество  $\Omega$ , т.е.  $g : \Omega_1, \dots, \Omega_r \rightarrow \Omega$ . Тогда нечеткое множество  $F$  функции  $f$ , т.е. его функция принадлежности  $\mu_F(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , определяется на основе *принципа обобщения Заде*<sup>3</sup> [156] следующим образом:

$$\mu_F(\omega) = \begin{cases} \sup_{(\omega_1, \dots, \omega_r) : \omega = f(\omega_1, \dots, \omega_r)} \min_{i=1, \dots, r} \mu_{F_i}(\omega_i), & f^{-1}(\omega) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(\omega) = \emptyset \end{cases},$$

где  $f^{-1}(\omega)$  – обратная функция.

Из приведенного выражения видно, что для вычисления функции принадлежности  $\mu_F$  требуется решить задачу оптимизации. При этом сложность задачи определяется количеством переменных функции  $f$  и множествами  $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ . Поэтому использование принципа обобщения в его основном виде во многих случаях является достаточно сложной вычислительной задачей. Однако если функция  $f(\omega_1, \dots, \omega_r)$  является монотонной и непрерывной по всем переменным, то задача оптимизации существенно упрощается и вычисление  $\mu_F(\omega)$  сводится к вычислению значений функции  $f$  на границах  $\alpha$ -уровневых срезов. Пусть  $\omega_i^-(\alpha)$  – левая граница и  $\omega_i^+(\alpha)$  – правая граница  $\alpha$ -уровневого среза нечеткого множества  $F_i$ , определяемые как обратные функции для  $\mu_{F_i}(\omega_i)$ . Без потери общности будем считать, что функция  $f(\omega_1, \dots, \omega_r)$  возрастает по  $\omega_1, \dots, \omega_j$  и убывает по  $\omega_{j+1}, \dots, \omega_r$ . Тогда левая  $\omega^-(\alpha)$  и правая  $\omega^+(\alpha)$  границы  $\alpha$ -уровневого среза результирующего нечеткого множества  $F$  определяются как

$$\omega^-(\alpha) = f(\omega_1^-(\alpha), \dots, \omega_j^-(\alpha), \omega_{j+1}^+(\alpha), \dots, \omega_r^+(\alpha)),$$

---

<sup>3</sup>Zadeh's extension principle (англ.)

$$\omega^+(\alpha) = f(\omega_1^+(\alpha), \dots, \omega_j^+(\alpha), \omega_{j+1}^-(\alpha), \dots, \omega_r^-(\alpha)).$$

Таким образом, в случае монотонности функции  $f$  по всем аргументам сложная задача оптимизации сводится к простейшим интервальным вычислениям [149, 183].

Формальной аналогией принципа обобщения Заде в теории вероятностей является интеграл свертки, используемый при вычислении функции распределения вероятностей некоторой функции случайных величин. Действительно, если в принципе обобщения Заде заменить операцию “sup” интегралом, “min” произведением, а функции принадлежности плотностями вероятности, то получим обычный интеграл свертки. Однако здесь следует сказать, что аналогия является только формальной, так как основа элементов теории нечетких множеств и теории вероятностей совершенно различная.

Строго говоря, принцип обобщения в рассмотренном виде предполагает, что нет сведений о независимости нечетких множеств. Этот факт отражается в использовании операции минимума. В общем случае операция минимума заменяется *треугольной нормой*  $T$ , т.е. функцией  $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Примерами треугольных норм для двух нечетких множеств с функциями принадлежности  $\mu_X(x)$  и  $\mu_Y(y)$  являются функции  $T_1 = \min(\mu_X(x), \mu_Y(y))$ ,  $T_2 = \mu_X(x) \cdot \mu_Y(y)$ ,  $T_3 = \max(0, \mu_X(x) + \mu_Y(y) - 1)$ . Подробное описание и варианты использования той или иной нормы рассмотрены в работе [28]. Необходимо отметить, что использование норм, отличных от  $T_1$ , влечет за собой существенное усложнение вычислений. Более того, в этом случае свойство принципа обобщения при анализе монотонных функций  $f$ , сводящее сложную задачу оптимизации к обычному интервальному анализу, больше не выполняется. Поэтому в теории нечетких множеств в основном используют треугольную норму  $T_1$  как некоторое приближение для того, чтобы избежать сложных расчетов.

Одной из важных задач, которые возникают в рамках теории нечетких множеств, является интерпретация нечеткого множества и определение его точного аналога. Существует огромное количество методов решения этой задачи (см. [155, 158, 160, 167]). Рассмотрим только один важный случай, когда анализируется нечеткая вероятность  $F$  некоторого

события  $A$ , характеризующая неизвестную вероятность  $P(A)$ . В этом случае  $\Omega = [0, 1]$ . Пусть  $\mu_F(p)$  – функция принадлежности нечеткой вероятности  $F$ . Покажем, что нечеткое число  $F$  генерирует нижнюю и верхнюю вероятности события  $A$ . Пусть  $Z(p)$  – вероятность события  $A$  при условии того, что  $P(A) = p$ . Тогда функция  $Z$  записывается как  $Z(p) = p$ . Отсюда нижняя вероятность события  $A$  определяется как нижняя граница математического ожидания функции  $Z$ , которая вычисляется как [133]

$$\underline{P}(A) = 1 - \int_0^1 \sup \{ \mu_F(p) : p \leq y \} dy.$$

Аналогично определяется верхняя вероятность

$$\overline{P}(A) = \int_0^1 \sup \{ \mu_F(p) : p > y \} dy.$$

Если функция  $\mu_F(p)$  является унимодальной с вершиной в точке  $p = p_0$ , то приведенные выражения существенно упрощаются и имеют вид:

$$\underline{P}(A) = p_0 - \int_0^{p_0} \mu_F(y) dy, \quad \overline{P}(A) = p_0 + \int_{p_0}^1 \mu_F(y) dy. \quad (3.1)$$

Таким образом, нечеткую вероятность события можно интерпретировать при помощи границ возможного множества вероятностей этого события.

**Пример 3.1.** Пусть функция принадлежности нечеткой вероятности имеет вид

$$\mu_F(p) = \begin{cases} 1 - (a - p)/b, & p \leq a \\ 1 + (a - p)/b, & p > a \end{cases}.$$

Тогда  $\underline{P}(A) = a - b/2$ ,  $\overline{P}(A) = a + b/2$ . Если  $a = 0.75$  и  $b = 0.2$ , то можно утверждать, что неизвестная вероятность находится в пределах  $[0.6, 0.8]$ .

Подробное описание основных положений теории нечетких множеств и ее применение в различных областях можно найти в работах [155, 158, 160, 167, 175, 179].

### 3.2. Меры возможности и необходимости

Используя основные идеи нечетких множеств, для моделирования неопределенности были предложены меры или функции возможности [146].

*Мера возможности*<sup>4</sup>  $\Pi : \mathcal{P}o(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  на множестве мощности  $\mathcal{P}o(\Omega)$  универсального множества  $\Omega$  – это функция, обладающая рядом присущих только ей свойств, а именно:

- 1)  $\Pi(\emptyset) = 0$  (мера возможности пустого множества равна 0);
- 2)  $\Pi(\Omega) = 1$  (мера возможности всего множества  $\Omega$  равна 1);
- 3) для любого набора подмножеств  $A_i \in \mathcal{P}o(\Omega)$  и любого множества индексов  $J$  выполняется условие

$$\Pi \left( \bigcup_{i \in J} A_i \right) = \sup_{i \in J} \Pi(A_i).$$

Мера возможности  $\Pi$  может быть представлена *функцией распределения возможностей* или просто *распределением возможностей*  $\pi : \Omega \rightarrow [0, 1]$  так, что для любого  $A \in \mathcal{P}o(\Omega)$  выполняется равенство

$$\Pi(A) = \sup_{\omega \in A} \pi(\omega).$$

Обычно предполагается условие нормализации, в соответствии с которым  $\sup\{\pi(\omega) : \omega \in \Omega\} = 1$ . Необходимость этого условия вытекает из требования выполнения свойства 2) меры возможности.

Если рассматривать множество  $\Omega$  как пространство событий, то мера возможности определена для событий из этого пространства. В данном случае для некоторого события говорят, что для него существует возможность появления. Распределение возможностей  $\pi_1$  является более информативным

---

<sup>4</sup>Possibility measure (англ.)

по сравнению с распределением  $\pi_2$ , если для всех значений  $\omega \in \Omega$  выполняется неравенство  $\pi_1(\omega) \leq \pi_2(\omega)$ . Термин “возможность” отражает тот факт, что событие может быть мало возможным или абсолютно возможным и т.д. Кроме того, большая степень возможностей событий  $A$  и  $B$  гарантирует такую же степень возможности события  $A \cup B$ .

Основное различие между вероятностью и возможностью заключается в том, что для двух непересекающихся множеств  $A$  и  $B$  возможность объединения  $A \cup B$  равна максимуму возможностей<sup>5</sup>  $A$  и  $B$ , т.е.  $\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$ , в то время как вероятность объединения  $A \cup B$  равна сумме вероятностей  $A$  и  $B$ , т.е.  $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$ .

Двойственной мерой для возможности является *мера необходимости*<sup>6</sup>. Мера необходимости  $N: \mathcal{P}o(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  на множестве мощности  $\mathcal{P}o(\Omega)$  универсального множества  $\Omega$  – это функция, которая для любого  $A \in \mathcal{P}o(\Omega)$  определяется как  $N(A) = 1 - \Pi(A^c)$ , где  $A^c$  есть дополнение подмножества  $A$  до множества  $\Omega$ , т.е.  $A^c \cup A = \Omega$ .

Основываясь на определениях мер возможности и необходимости, нетрудно получить ряд соотношений для любого  $A \in \mathcal{P}o(\Omega)$ :

- 1)  $N(A) \leq \Pi(A)$ ;
- 2) если  $\Pi(A) < 1$ , то  $N(A) = 0$ ;
- 3) если  $N(A) > 0$ , то  $\Pi(A) = 1$ ;
- 4)  $\max(\Pi(A), \Pi(A^c)) = 1$ ;
- 5)  $\min(N(A), N(A^c)) = 0$ .

Если известно распределение возможностей  $\pi(\omega)$ , то необходимость  $A \in \mathcal{P}o(\Omega)$  определяется как

$$N(A) = 1 - \sup_{\omega \notin A} \Pi(\omega) = 1 - \sup_{\omega \notin A} \pi(\omega).$$

---

<sup>5</sup>Здесь необходимо отметить, что это свойство возможностей в отличие от вероятностей выполняется также при пересекающихся  $A$  и  $B$ .

<sup>6</sup>Necessity measure (англ.)

Мера возможности имеет важное преимущество перед вероятностью с вычислительной точки зрения. Это преимущество заключается в том, что мера возможности является композиционной. Пусть  $P$  – мера вероятности и дано  $P(A)$  и  $P(B)$ ,  $A, B \in \mathcal{P}o(\Omega)$ . О вероятности  $P(A \cup B)$  можно сказать только то, что она меньше  $\max(P(A), P(B))$  и больше  $\min(P(A) + P(B), 1)$ . Эти границы<sup>7</sup> фактически являются наилучшими для  $P(A \cup B)$  в терминах вероятностей  $P(A)$  и  $P(B)$ . С другой стороны, возможность  $\Pi(A \cup B)$  точно определяется через возможности  $\Pi(A)$  и  $\Pi(B)$  как  $\max(\Pi(A), \Pi(B))$ .

Дюбуа и Прад отмечают в работе [29], что мера возможности не является композиционной в полном смысле, так как для двойственной меры необходимости это свойство справедливо только тогда, когда рассматривается пересечение множеств, т.е.  $N(A \cap B) = \min(N(A), N(B))$ ,  $A, B \in \mathcal{P}o(\Omega)$ . В то же время нельзя в рамках теории возможностей утверждать, что  $\Pi(A \cap B) = \min(\Pi(A), \Pi(B))$ . Справедливо только неравенство  $\Pi(A \cap B) \leq \min(\Pi(A), \Pi(B))$ .

Если нет никакой информации о событии  $A$ , то можно записать  $\Pi(A) = \Pi(A^c) = 1$  и  $N(A) = N(A^c) = 0$ , и справедливы соотношения  $\max(\Pi(A), \Pi(A^c)) = 1$  и  $\min(N(A), N(A^c)) = 0$ . Способность моделировать полное отсутствие информации является важным преимуществом теории возможностей перед теорией вероятностей.

Несмотря на то что теория возможностей была создана в развитие теории нечетких множеств, эти две теории различны. Их соотношение может быть продемонстрировано следующим хорошо известным примером [46].

Нечеткие множества: Когда бутылка наполовину полная, можно говорить о том, что степень истинности высказывания “Бутылка полная” равна 0.5. Слово “полная” здесь рассматривается как нечеткое понятие, описывающее объем жидкости в бутылке.

Теория возможностей: Имеется одна бутылка, которая либо полностью полная, либо полностью пустая. Утверждение “степень возможности того, что бутылка полная равна 0.5”

---

<sup>7</sup>Эти границы достаточно просто выводятся из границ Фреше [36].

описывает степень доверия. Один из способов интерпретации значения 0.5 в этом утверждении заключается в следующем: “Я готов ставить на то, что бутылка полная, пока шансы равны точно 1 : 1 или лучше, и я не ставил бы на то, что бутылка полная при любых других шансах.”

По аналогии с теорией вероятностей определим *нечеткую величину*, или *переменную*  $X$ , которая принимает значения из множества  $\Omega$ , образующего пространство событий. Нечеткая величина  $X$  характеризуется функцией распределения возможностей  $\pi$  так, что  $\pi(\omega) = \text{P}(\gamma : X(\gamma) = \omega)$  для всех  $\omega \in \Omega$ .

Основная особенность распределения возможностей заключается в том, что оно устанавливает некоторую упорядоченность предпочтений на множестве значений величины  $X$ . Функция  $\pi$  показывает, что известно о значении величины  $X$ , и условие  $\pi(\omega_1) > \pi(\omega_2)$  означает, что утверждение  $X = \omega_1$  более правдоподобно, чем утверждение  $X = \omega_2$ . Равенство  $\pi(\omega) = 0$  означает, что  $\omega$  – значение величины  $X$ , которое просто невозможно. Равенство  $\pi(\omega) = 1$  означает только то, что  $\omega$  – одно из наиболее правдоподобных значений величины  $X$ . Отсюда следует, что анализ событий в рамках теории возможностей имеет смысл только на качественном сравнительном уровне. Этот же факт был строго доказан Пытьевым в его книге [169]. Пытьев назвал эту особенность меры возможности принципом относительности возможности. Согласно этому принципу, в теории возможностей не могут быть истолкованы ответы на такие вопросы, как например, чему равна возможность того или иного события, насколько или во сколько раз возможность одного события больше, чем другого и т.п. (кроме значений возможности 0 и 1). Могут использоваться только сравнительные оценки типа: “возможность одного события больше, меньше или равна возможности другого”.

Очевидно, что, с одной стороны, рассмотренная особенность меры возможности существенно снижает значимость теории возможностей по сравнению с теорией вероятностей. С другой стороны, теория возможностей требует значительно меньшего объема исходной информации для анализа событий. Кроме того, теория возможностей в отличие от теории вероятностей позволяет описывать полное отсутствие информации.

Унимодальное распределение возможностей может также рассматриваться как множество вложенных доверительных интервалов, которые являются  $\alpha$ -уровневыми срезами  $[\underline{\omega}_\alpha, \bar{\omega}_\alpha] = \{\omega : \pi(\omega) \geq \alpha\}$  функции  $\pi$ . Степень определенности того, что интервал  $[\underline{\omega}_\alpha, \bar{\omega}_\alpha]$  содержит значение  $X$ , равна необходимости  $N([\underline{\omega}_\alpha, \bar{\omega}_\alpha]) = 1 - \alpha$ , если функции  $\pi$  непрерывна. Наоборот, множество вложенных интервалов  $A_i$  со степенями определенности  $\lambda_i$  того, что  $A_i$  содержит значение  $X$ , эквивалентно распределению возможностей

$$\pi(\omega) = \min_i \{1 - \lambda_i, \omega \in A_i\}.$$

При этом  $\lambda_i$  интерпретируется как нижняя граница  $N(A_i)$ , а  $\pi$  определяется как наименее информативное распределение возможностей, удовлетворяющее условию нижних границ.

Распределение возможностей  $\pi(\omega)$  по всем признакам имеет свойства, аналогичные функции принадлежности  $\mu_F(\omega)$  некоторого нечеткого множества  $F$ , где  $\omega \in \Omega$ . Пусть выполняется равенство  $\pi(\omega) = \mu_F(\omega)$ . Тогда нечеткая переменная  $X$  может образовать нечеткое множество  $F = \{\omega, \pi(\omega)\}$ ,  $\omega \in \Omega$ . Однако понятия функции принадлежности и функции распределения возможностей не являются одним и тем же. Равенство  $\pi(\omega) = \mu_F(\omega)$  в большей степени аналогично равенству между функцией правдоподобия и условной функцией плотности в теории вероятностей. Функция  $\pi(\omega)$  является сокращенной записью для  $\pi(X = \omega | F)$ , так как данная функция оценивает возможность того, что переменная  $X$  равна  $\omega$  при условии, что известно только нечеткое утверждение “ $X$  есть  $F$ ”. Функция принадлежности  $\mu_F(\omega)$  оценивает степень совместимости точной информации  $X = \omega$  с нечетким утверждением “ $X$  есть  $F$ ”. Другими словами, нечеткая переменная и функция распределения возможностей характеризуют событие, а нечеткое множество – нечетко определенное понятие, связанное с событием.

Де Куман [18] ввел возможность интеграл, как обобщение нечеткого интеграла Сугено и как возможность интеграл Лебега. На основе этого интеграла определена формальная аналогия между основными понятиями в рамках теории возможностей и теории вероятностей.



### 3.3. Способы интерпретации мер возможности

#### 3.3.1. Возможность как верхняя граница вероятности

Один из распространенных взглядов на меру возможности заключается в ее интерпретации как верхней границы вероятности [28, 133, 169]. Рассмотрим множество вероятностей

$$\mathcal{P}(\Pi) = \{P \mid P(A) \leq \Pi(A), \forall A \subseteq \Omega\},$$

согласованных с возможностью  $\Pi$ . Тогда верхняя граница вероятности

$$\bar{P}(A) = \sup\{P(A) \mid P \in \mathcal{P}(\Pi)\}$$

совпадает с мерой возможности  $\Pi(A)$ , а распределение возможностей в этом случае определяется соотношением

$$\pi(\omega) = \bar{P}(\{\omega\}), \forall \omega \in \Omega.$$

Множество  $\mathcal{P}(\Pi)$  не бывает никогда пустым благодаря условию нормализации распределения возможностей.

Пусть  $\Omega$  – пространство событий и  $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ . Предположим, что известны нижние границы  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  вероятностей  $A_1, \dots, A_n$ . Каковы границы вероятности  $P(B)$  любого подмножества  $B$  из  $\Omega$ ? Формально требуется найти такие  $\underline{P}(B)$  и  $\bar{P}(B)$ , что

$$\begin{aligned} \underline{P}(B) &= \inf\{P(B) \mid P \in \mathcal{P}\}, \\ \bar{P}(B) &= \sup\{P(B) \mid P \in \mathcal{P}\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь  $\mathcal{P} = \{P \mid P(A_i) \geq \alpha_i, i = 1, \dots, n\}$ . При этом необходимо отметить, что вероятности  $\underline{P}(B)$  и  $\bar{P}(B)$  являются наиболее полной вероятностной характеристикой события  $B$ , которую можно дать, основываясь только на наблюдениях  $A_1, \dots, A_n$ .

Поиск  $\underline{P}(B)$  и  $\bar{P}(B)$  является задачей линейного программирования. Пусть  $\mathcal{B}$  – булева алгебра, порожденная множеством  $\{A_1, \dots, A_n\}$ ;  $E_j$  – атом алгебры, образованный пересечениями всех подмножеств  $A_i$  или их дополнениями  $A_i^c$ ,  $i = 1, \dots, n$ , т.е.  $E_j = A_1^* \cap \dots \cap A_n^*$ , где  $A_i^* = A_i$  или  $A_i^* = A_i^c$ . Тогда (3.2) может быть представлено в виде неизвестных вероятностей  $x_j = P(E_j)$  всех непустых множеств  $E_j$ . Если для некоторого множества индексов  $J$  справедливо  $B = \bigcup_{j \in J} E_j \in \mathcal{B}$ ,

то нижняя граница вероятности  $P(B)$  определяется как

$$\underline{P}(B) = \inf_{x_j, j \in J} \sum_{j \in J} x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{\emptyset \neq E_j \subseteq A_i} x_j \geq \alpha_i, i = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^{2^n} x_j = 1.$$

Аналогично определяется верхняя граница  $\overline{P}(B)$  заменой “inf” на “sup”. Когда  $B \notin \mathcal{B}$ ,  $\underline{P}(B)$  и  $\overline{P}(B)$  могут быть определены как *внутренняя* и *внешняя меры* соответственно, т.е.

$$\begin{aligned} \underline{P}(B) &= \sup\{P(C) \mid C \in \mathcal{B}, C \subseteq B\}, \\ \overline{P}(B) &= \inf\{P(C) \mid C \in \mathcal{B}, C \supseteq B\}. \end{aligned}$$

Верхняя вероятность  $\overline{P}$ , образованная множеством нижних границ  $\{P(A_i) \geq \alpha_i, i = 1, \dots, n\}$ , является мерой возможности, если подмножества  $\{A_1, \dots, A_n\}$  вложенные, т.е.  $A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n$ . Обратно, любая мера возможности на конечном множестве может быть образована нижними границами вероятностей вложенных множеств  $A_i$ . Таким образом, мера возможности может рассматриваться в ряде случаев как верхняя вероятность определенного множества вероятностей случайных множеств.

В работах [28, 133] показано, что и для непрерывных распределений мера возможности на вложенных множествах совпадает с верхними функциями распределений некоторой интервальной модели. Это открывает совершенно новые и замечательные возможности для построения и интерпретации функции распределения возможностей.

### 3.3.2. Возможность как функция правдоподобия в рамках теории случайных множеств

Другим распространенным способом интерпретации функции распределения возможностей является ее рассмотрение в рамках теории случайных множеств. Рассмотрим

случайное множество  $\mathcal{F} = \{(A_i, m(A_i)), i = 1, \dots, n\}$ , содержащее фокальные элементы  $A_1, \dots, A_n$  с базовыми вероятностями  $m(A_i) \in (0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , при выполнении условия  $\sum_{i=1}^n m(A_i) = 1$ . Предположим, что фокальные элементы  $A_1, \dots, A_n$  упорядочены таким образом, что  $A_i \subseteq A_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , т.е. они вложены друг в друга. Тогда функция правдоподобия любого подмножества  $A \in \mathcal{P}o(\Omega)$ , определяемая из выражения

$$\text{Pl}(A) = \sum_{i: A \cap A_i \neq \emptyset} m(A_i),$$

является мерой возможности, а соответствующая функция доверия совпадает с мерой необходимости. Распределение возможностей в этом случае может быть получено как

$$\pi(\omega) = \sum_{i: \omega \in A_i} m(A_i).$$

Информация, содержащаяся в наборе всех базовых вероятностей  $m(A_i)$  и в полученном распределении возможностей  $\pi(\omega)$ , одинакова.

Кроме того, Шейфер показал [75], что функция правдоподобия удовлетворяет свойству  $\text{Pl}(A \cup B) = \max(\text{Pl}(A), \text{Pl}(B))$  только в том случае, если подмножества  $A_i$  являются вложенными. Отсюда следует, что мера возможностей является частным случаем функций правдоподобия, которые в свою очередь являются верхними вероятностями.

Однако, несмотря на то что данный способ интерпретации меры возможности является достаточно наглядным, Халперн [46] отметил, что он является не всегда лучшим. Аргументом этого заключения является то, что вложенность всех интервалов – это слишком жесткое требование, которое редко выполняется на практике. С другой стороны, Дюбуа [28] предлагает рассматривать меры возможности с использованием множества доверительных интервалов, общепринятых в статистическом анализе. При этом он делает акцент на том, что доверительные интервалы для различных доверительных вероятностей всегда являются вложенными. С этой точки зрения такой способ интерпретации заслуживает внимания.

### 3.3.3. Распределение возможностей и р-блоки

Еще один распространенный способ интерпретации распределения возможностей – это его представление в виде нижней и верхней функций распределения, т.е. в виде р-блоков. Если исходная информация о случайной величине  $X$  представлена в виде нижнего  $\underline{F}$  и верхнего  $\overline{F}$  распределения вероятностей и неизвестное “истинное” точное распределение  $F$  определяется из условия  $\underline{F}(x) \leq F(x) \leq \overline{F}(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , то пара распределений  $\underline{F}$  и  $\overline{F}$  называется р-блоком<sup>8</sup> [13]. Заметим, что один из вариантов р-блоков имеет вид

$$\underline{F}(x) = \text{Bel}(X \in (-\infty, x]),$$

$$\overline{F}(x) = \text{Pl}(X \in (-\infty, x]).$$

Так как функции доверия и правдоподобия определяются для вложенных интервалов, то можно представить унимодальную функцию распределения возможностей  $\pi$  в виде р-блока следующим образом:

$$\underline{F}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0 \\ 1 - \pi(x), & x > x_0 \end{cases}, \quad (3.3)$$

$$\overline{F}(x) = \begin{cases} \pi(x), & x \leq x_0 \\ 1, & x > x_0 \end{cases}. \quad (3.4)$$

Здесь  $x_0$  – точка максимума функции распределения возможностей. Полученный р-блок имеет важное свойство: существует такая точка  $x_0 \in \mathbb{R}$ , что  $\underline{F}(x) = 0$  и  $\overline{F}(x) = 1$ . Это означает, что р-блок содержит такое значение  $x_0$ , что два распределения вероятностей, “действующие” в различных областях вещественной оси, разделяются этим значением.

Распределение возможностей может быть восстановлено из полученных двух распределений вероятностей по формуле

$$\pi(x) = \min(\overline{F}(x), 1 - \underline{F}(x)).$$

Обозначим множество вероятностей, образованное р-блоком,  $\mathcal{M}_1$ , т.е.

$$\mathcal{M}_1 = \{P, \forall x \in \mathbb{R}, \underline{F}(x) \leq F(x) \leq \overline{F}(x)\}.$$

---

<sup>8</sup>р-box (англ.)

Пусть  $\mathcal{M}_2$  – множество вероятностей, образованное парой функций  $N$  и  $\Pi$ , т.е.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2 &= \{P, \forall A, N(A) \leq \Pi(A)\} = \\ &= \{P, \forall A, P(A) \leq \Pi(A)\} = \\ &= \mathcal{P}(\Pi).\end{aligned}$$

Баудрит и Дюбуа [5] доказали, что множество  $\mathcal{M}_2$  является более предпочтительным и точным по сравнению со множеством  $\mathcal{M}_1$ , т.е.  $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_1$ . Отсюда следует, что представление информации в виде распределения возможностей является более предпочтительным, чем представление в виде эквивалентных границ функций распределения. В то же время во многих задачах представление в виде р-блока может рассматриваться как некоторое приближение распределения возможностей. Кроме того, благодаря границам функций распределения, образованных распределением возможностей  $\pi$ , можно определить границы средних значений (математических ожиданий) нечеткой переменной  $X$ . При этом нижняя и верхняя границы средних значений определяются как

$$\begin{aligned}\underline{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} x d\bar{F}(x) = x_0 - \int_{-\infty}^{x_0} \pi(x) dx, \\ \bar{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = x_0 + \int_{x_0}^{\infty} \pi(x) dx.\end{aligned}$$

Необходимо отметить, что приведенные выражения справедливы для случая  $\Omega = \mathbb{R}$ . Однако их можно обобщить на любое подмножество  $\mathbb{R}$ . В частности, при анализе нечетких вероятностей имеем  $\Omega = [0, 1]$  и получаем следующие выражения “средних” вероятностей:

$$\underline{E}X = x_0 - \int_0^{x_0} \pi(x) dx, \quad \bar{E}X = x_0 + \int_{x_0}^1 \pi(x) dx,$$

которые полностью совпадают с выражениями, полученными в рамках интервальной интерпретации нечетких множеств (3.1) при условии, что  $\pi(x) = \mu_F(x)$ .

Таблица 3.1. Функция множества

$A$	$a$	$b$	$c$	$a, b$	$a, c$	$b, c$
$g_1(A)$	0.5	0.5	0.75	0.7	0.9	0.75

### 3.4. Определение возможности и необходимости с использованием мер Сугено

Меры возможности и необходимости могут быть получены с использованием мер Сугено, которые также называются нечеткими мерами. *Монотонная мера Сугено* – это такая функция  $g : \mathcal{P}o(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$ , что

- 1)  $g(\emptyset) = 0, g(\Omega) = 1$ ;
- 2)  $A \subset B \implies g(A) \leq g(B)$ ;
- 3)  $A_i \uparrow A$  или  $A_i \downarrow A \implies \lim_{i \rightarrow +\infty} g(A_i) = g(A)$ .

Отсюда видно, что любая мера вероятности является монотонной мерой Сугено. Из определения имеем следующие свойства:

- 1)  $g(A) \in [0, 1]$ ;
- 2)  $g(A \cup B) \geq \max\{g(A), g(B)\}$ ;
- 3)  $g(A \cap B) \leq \min\{g(A), g(B)\}$ .

**Пример 3.2.** Пусть  $\Omega$  – множество  $\{a, b, c\}$ . Функция множества  $g_1$ , определенная в табл. 3.1, является монотонной мерой Сугено, но в то же время не является мерой вероятности. Действительно,  $g_1(\{a\}) + g_1(\{b\}) + g_1(\{c\}) = 1.75 > 1$ .

**Пример 3.3.** Пусть  $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$  – такая функция, что  $\sup_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$ . Тогда функция  $g_2 : \mathcal{P}o(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ , имеющая свойства

$$g_2(\emptyset) = 0, \quad g_2(A) = \sup_{\omega \in A} f(\omega) \quad \forall A \neq \emptyset,$$

является монотонной мерой Сугено, которая в общем не является мерой вероятности. Например, если  $\Omega = \{a, b, c\}$  и  $f(a) = f(b) = 1$ , то из определения имеем  $g_2(\{a\}) + g_2(\{a, b\}) = 1 + 1 = 2$ .

Важный класс мер Сугено может быть получен при рассмотрении функций  $g$ , удовлетворяющих для всех событий  $A, B$  условию  $g(A \cup B) = \max\{g(A), g(B)\}$ . Этот класс мер Сугено определяет меру возможности. Мера  $g_2$ , рассмотренная в примере 3.3, является мерой возможности.

Рассмотрим статистическую модель  $\{(X, \mathbf{X}, P_\theta) : \theta \in \Theta\}$ , где  $\Theta$  – конечное множество параметров модели. Пусть  $L$  – соответствующая функция правдоподобия. Определим функцию  $L^*$  как верхнюю границу функции правдоподобия по всем  $\theta : L^*(x) = \sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; x)$ . Выберем  $\Omega = \Theta$  и  $f$  равным нормализованной функции правдоподобия:

$$f(\theta) = \frac{L(\theta; x)}{L^*(x)}.$$

Тогда функция

$$g_2 : (\Theta \supseteq) \Lambda \longmapsto \sup_{\Lambda} \frac{L(\theta; x)}{L^*(x)}$$

определяет меру возможности, имеющую непосредственную статистическую интерпретацию в терминах максимума функции правдоподобия.

Другой класс мер Сугено может быть получен при рассмотрении таких функций  $g$ , когда выполняется равенство  $g(A \cap B) = \min\{g(A), g(B)\}$  для всех событий  $A, B$ . Этот класс мер Сугено определяет меру необходимости.

### 3.5. Заключение

В данной главе достаточно кратко рассмотрены основные определения мер возможности и необходимости и даны различные способы их интерпретации. Главный вывод, который следует здесь сделать, заключается в том, что меры возможности и необходимости можно рассматривать в терминах множеств вероятностей. Несмотря на то что ряд авторов в области нечетких множеств и теории возможностей рассматривают данные меры как альтернативу вероятности, с этим можно согласиться только частично. Возможно, что рассмотренные меры являются действительно альтернативой классической

вероятности, согласно которой совокупность всех событий характеризуется одним уникальным распределением вероятностей. Однако при неполноте исходной информации в большинстве случаев невозможно или достаточно рискованно ограничиваться одним распределением. Поэтому в такой ситуации способы описания неопределенности, использующие классы или множества распределений вероятностей, становятся более предпочтительными. При этом теорию возможностей можно рассматривать как раз в качестве частного случая предлагаемого описания неопределенности. Более того, классическая теория вероятностей и теория возможностей являются своего рода крайними частными случаями теорий, основанных на множествах распределений вероятностей. Классическая теория вероятностей используется, когда имеется полная статистическая информация в том смысле, что для каждого элемента пространства элементарных исходов можно определить вероятность с той или иной степенью точности. Теория возможностей, наоборот, используется в наихудшей ситуации с точки зрения наличия статистической или какой-либо иной информации. В то же время практика использования теории возможностей показала, что некоторые ее свойства и особенности создают основу для весьма эффективного ее применения во многих прикладных областях.



## Глава 4

### Элементы теории интервальных средних

Знающий целое может знать и его часть, но знающий часть еще не знает целого.

*Лукиан*

#### 4.1. Предпосылки создания теории интервальных средних

Наличие целого ряда математических способов моделирования неопределенности и неполноты информации, включая теорию вероятностей, теорию возможностей, интервальные вероятности, теорию Демпстера–Шейфера, позволяет описывать самые различные ситуации принятия решений с точки зрения имеющейся исходной информации. В то же время, несмотря на внешние различия этих теорий, все они имеют общие элементы и тесно связаны друг с другом. С другой стороны, каждая из этих теорий работает со своим типом исходной информации и не затрагивает другие типы. Это приводит к тому, что в некоторых случаях достаточно трудно объединить разнородную информацию, особенно если она еще и неполная или неточная.

Поэтому возникла необходимость создания общей теории, которая бы объединила различные способы описания неопределенности и рассматривала бы их как частные случаи, тем самым открывая путь, с одной стороны, для обработки разнородной неполной информации и, с другой стороны, для объединения самых различных, на первый взгляд, подходов, моделей и точек зрения в одну общую концепцию.

В направлении решения задачи создания такой общей теории независимо и одновременно в 1991 году были опубликованы две фундаментальные работы. Одна принадлежит П. Уолли [131] и написана на английском языке, а другая – В.П. Кузнецову [161] и написана на русском языке. Параллельно был опубликован ряд фундаментальных работ К. Вайхзельбергера [137], которые затем также вылились в книгу [138] на немецком языке. Интересным остается тот факт, что авторы приведенных книг подошли фактически к одному и тому же совершенно разными путями, используя различную интерпретацию результатов, применяя различную терминологию для одних и тех же понятий. Однако, несмотря на внешние различия, все три подхода имеют общую аксиматику, общие базовые элементы и общие методы обработки информации.

В дальнейшем изложение основ теории и частично терминология будет в основном опираться на подход, предложенный Кузнецовым, так как читатель может всегда обратиться к его книге, как к наиболее доступной среди трех упомянутых книг. В то же время особенности других подходов также будут упоминаться.

## 4.2. Основы теории интервальных средних

Для создания обобщенных статистических моделей, учитывающих разнородность источников информации и ее неполноту, Кузнецов [161] разработал *теорию интервальных средних*<sup>1</sup>, общий аппарат которой основан на обобщенных понятиях *средних* и *признаков*.

В соответствии с теорией интервальных средних, произвольная числовая функция  $h(x)$  называется *признаком*<sup>2</sup> слу-

---

<sup>1</sup>Теория, разработанная Уолли, называется *теорией неточных вероятностей* (imprecise probability theory – англ.). Хотя название не вполне отражает суть теории (собственно, как и у Кузнецова), в настоящее время оно является международным и вся литература по вопросам теории использует это название. Теория, разработанная Вайхзельбергером, носит название *теории интервальных вероятностей* (Intervallwahrscheinlichkeit – нем.), что также не отражает ее сущности.

<sup>2</sup>В теории неточных вероятностей Уолли признаку соответствует понятие игры (gamble – англ.)

чайного явления, если  $x \in \Omega$ , где  $\Omega$  – пространство элементарных исходов [161]. Для признака можно определить его *точное среднее*<sup>3</sup>  $\mathbb{E}h$ , которое определяется по известной формуле  $\mathbb{E}h = \int_{\Omega} h(x)dF(x)$  или по формуле  $\mathbb{E}h = \sum_{x \in \Omega} h(x)\pi(x)$ , где  $F(x)$  или  $\pi(x)$  – функция распределения непрерывной или дискретной случайной величины соответственно. Из определения среднего видно, что это фактически математическое ожидание случайной величины. Неустойчивость явлений, неточность и неполнота статистических знаний, свойственная многим реальным задачам, требует перехода к интервальным понятиям. *Интервальным средним* признака называется отрезок  $[\underline{\mathbb{E}h}, \overline{\mathbb{E}h}]$ . При этом  $\underline{\mathbb{E}h}$  называется *нижним средним*, а  $\overline{\mathbb{E}h}$  – *верхним средним*. Если мы не знаем точно функцию распределения  $F(x)$ , а можем лишь говорить о ее границах  $\underline{F}(x) \leq F(x) \leq \overline{F}(x)$  для всех значений  $x \in \Omega$ , то точное среднее находится в пределах  $\underline{\mathbb{E}h} \leq \mathbb{E}h \leq \overline{\mathbb{E}h}$ . Частным или крайним случаем интервального среднего является равенство  $\underline{\mathbb{E}h} = \overline{\mathbb{E}h} = \mathbb{E}h$ , когда интервальное среднее переходит в точное. Другой частный или крайний случай, когда границы интервального среднего совпадают с минимальным и максимальным значением функции  $h$ :  $\underline{\mathbb{E}h} = \inf_x h(x)$ ,  $\overline{\mathbb{E}h} = \sup_x h(x)$ . Этот случай означает, что о среднем ожидаемом значении признака  $h$  ничего не известно.

Интервальные средние можно интерпретировать по-разному. Кузнецов предлагает их рассматривать как диапазон возможных значений существующего, но неизвестного точного среднего. Он также предлагает ряд других интерпретаций.

Уолли предложил другую интерпретацию интервальных средних, основанную на рациональном поведении субъекта. Признак  $h$  интерпретируется как некоторое вознаграждение, которое будет выплачено после наблюдения  $h$ , в единицах полезности. Нижнее среднее  $\underline{\mathbb{E}h}$  – это действительное число, которое интерпретируется как наибольшая покупная цена за  $h$ , означающая, что принимается любая цена меньше

---

<sup>3</sup>В теории Уолли точному среднему соответствует термин линейное предвидение, или линейный прогноз (linear prevision – англ.). Необходимо отметить, что дословный перевод многих терминов не совсем отражает их реальный смысл.

$\underline{\mathbb{E}}h$  за неопределенное вознаграждение. Верхнее среднее  $\overline{\mathbb{E}}h$  – это действительное число, которое интерпретируется как наименьшая цена продажи  $h$ . Этот подход близок к определению субъективной вероятности (см. раздел 1.2).

Главной особенностью интервального среднего является тот факт, что в отличие от точного среднего интервальное всегда существует, так как имеется возможность перехода к крайнему случаю полного незнания.

Интервальные средние охватывают большой класс оценок. Если  $h(x) = I_A(x)$  – индикаторная функция, принимающая значение 1 при  $x \in A$ , то  $\underline{\mathbb{E}}h$  – вероятность события  $A$ . Таким образом, интервальное среднее в этом случае есть интервальная вероятность  $[\underline{P}(A), \overline{P}(A)]$ . Если  $h(x) = x^k$ , то  $\underline{\mathbb{E}}h$  –  $k$ -й момент случайной величины, а интервальное среднее – интервальный  $k$ -й момент. Интервальные средние позволяют формализовывать сравнительные оценки. Например, оценка “вероятность события  $A$  больше вероятности события  $B$ ” моделируется при помощи нулевого нижнего среднего, т.е.  $\underline{\mathbb{E}}(I_A(x) - I_B(x)) = 0$ .

Класс  $\mathcal{F}$  признаков, на котором определены ограниченные верхние средние<sup>4</sup>, называется областью существования верхних средних и должен удовлетворять трем свойствам:

- C1.  $g \in \mathcal{F}, h \leq g \Rightarrow h \in \mathcal{F}$ ;
- C2.  $h \in \mathcal{F}, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow b \cdot h + c \in \mathcal{F}$ ;
- C3.  $h, g \in \mathcal{F} \Rightarrow h + g \in \mathcal{F}$ .

Из свойств C1–C3 следует, что класс  $\mathcal{F}$  является полулинейным. Тогда можно построить математическую модель явления  $\{\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathbb{E}}, \overline{\mathbb{E}}\}$ , которая включает: а) пространство элементарных исходов; б) полулинейный класс признаков  $\mathcal{F}$ ; в) средние на нем.

Для любых средних признаков  $h, g \in \mathcal{F}$  определены основные аксиомы их согласованности<sup>5</sup>:

- A1.  $g \geq h \Rightarrow \overline{\mathbb{E}}g \geq \overline{\mathbb{E}}h$ ;
- A2.  $\overline{\mathbb{E}}(b \cdot h + c) = b \cdot \overline{\mathbb{E}}h + c; \forall b \geq 0, c \in \mathbb{R}$ ;
- A3.  $\overline{\mathbb{E}}(h + g) \leq \overline{\mathbb{E}}h + \overline{\mathbb{E}}g$ ;

<sup>4</sup>Неограниченные признаки были детально исследованы в работах [85, 86]

<sup>5</sup>Coherence (англ.)

$$A4. \mathbb{E}(-h) = -\overline{\mathbb{E}}h.$$

*Интервальной моделью средних*  $\mathcal{M}$  называется совокупность верхних средних  $\overline{\mathbb{E}}h$  на заданной области их существования  $h \in \mathcal{F}$  и нижних средних<sup>6</sup>  $\underline{\mathbb{E}}h$ ,  $h \in -\mathcal{F}$ , согласованных между собой в смысле аксиом A1–A4.

### 4.3. Теорема продолжения

Одна из особенностей понятия интервального среднего в рамках рассматриваемой теории заключается в том, что оно является базовым, или “минимальным”, элементом. Определение интервальных средних через множество функций распределения вероятностей, как это было показано выше, не требуется для работы со средними. Множества распределений в данном случае выступают и далее будут выступать в качестве возможного пояснения понятия интервального среднего и операций над ними, но совсем не являются определяющим или составным элементом среднего. Хотя интервальное среднее можно зачастую рассматривать как интервальное математическое ожидание случайной величины, в некоторых случаях такая интерпретация не совсем корректна [131]. Это является главным отличием теории интервальных средних от интервальных вероятностей, рассмотренных в гл. 1.

Основным инструментом работы с интервальными средними является теорема, или принцип, продолжения и согласования средних<sup>7</sup>.

Предположим, что исходная информация представлена в виде набора интервальных средних признаков  $\mathcal{H} = \{h_i(x), i = 1, \dots, n, x \in \Omega\}$ , т.е. имеется множество средних  $\{\underline{\mathbb{E}}h_i, \overline{\mathbb{E}}h_i, i = 1, \dots, n\}$ . Интервальные средние являются *непротиворечивыми*, если при любом конечном выборе  $h_i \in \mathcal{H}$ , чисел  $c_i, d_i \geq 0$  и  $c$ , таком что  $c + \sum_{i=1}^n (c_i - d_i)h_i(x) \geq 0$ , имеет место

$$c + \sum_{i=1}^n (c_i \overline{\mathbb{E}}h_i - d_i \underline{\mathbb{E}}h_i) \geq 0.$$

<sup>6</sup>Область существования нижних средних  $-\mathcal{F}$  следует из аксиомы A4.

<sup>7</sup>Уолли назвал это процедурой естественного продолжения (natural extension – англ.)

Согласно теореме продолжения, для вычисления верхнего среднего нового признака  $g$  на основе непротиворечивого множества интервальных средних признаков из  $\mathcal{H}$  необходимо решить задачу линейного программирования

$$\bar{\mathbb{E}}g = \inf \left\{ c + \sum_{i=1}^n (c_i \bar{\mathbb{E}}h_i - d_i \underline{\mathbb{E}}h_i) \right\} \quad (4.1)$$

при ограничениях  $c_i, d_i \geq 0$  и

$$c + \sum_{i=1}^n (c_i - d_i)h_i(x) \geq g(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (4.2)$$

Здесь  $c_i, d_i, c$  – переменные оптимизации. Заметим, что поиск верхнего среднего осуществляется для всех линейных комбинаций исходных, или первичных, признаков из  $\mathcal{H}$ , таких что эти комбинации мажорируют признак  $g$  на всем множестве его значений, т.е. превышают этот признак. Другими словами, для функции  $g$  находят все возможные приближения сверху, представимые в виде линейных комбинаций исходных признаков, а затем из всех приближений выбирают наилучшее с точки зрения точности оценки (наименьшую верхнюю границу).

Из аксиомы А4 следует, что нижние средние признака  $g$  определяются из решения задачи

$$\underline{\mathbb{E}}g = \sup \left\{ c + \sum_{i=1}^n (c_i \underline{\mathbb{E}}h_i - d_i \bar{\mathbb{E}}h_i) \right\}$$

при ограничениях  $c_i, d_i \geq 0$  и

$$c + \sum_{i=1}^n (c_i - d_i)h_i(x) \leq g(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Здесь для функции  $g$  находят все возможные приближения снизу, представимые в виде линейных комбинаций исходных признаков, а затем из всех приближений выбирают наилучшее с точки зрения точности оценки (наибольшую нижнюю границу).

**Пример 4.1.** Предположим, что экономика характеризуется тремя состояниями: подъем (1), неизменное состояние (2), спад (3). Известно, что вероятность подъема находится в пределах от 0.3 до 0.4. В среднем наблюдалось неизменное состояние, а вероятность спада больше, чем подъема. Найдем границы вероятности неизменного состояния. Для этого необходимо формально представить имеющуюся информацию в виде интервальных средних. Для первой оценки имеем  $\underline{\mathbb{E}}I_{\{1\}}(x) = 0.3$ ,  $\overline{\mathbb{E}}I_{\{1\}}(x) = 0.4$ . Вторая оценка:  $\underline{\mathbb{E}}X = \overline{\mathbb{E}}X = 2$ . Третья оценка:  $\underline{\mathbb{E}}(I_{\{3\}}(x) - I_{\{1\}}(x)) = 0$ , верхнее среднее равно 1, но оно может не использоваться. Для вычисления верхнего среднего индикаторной функции  $I_{\{2\}}(x)$  (искомая верхняя вероятность неизменного состояния) перепишем задачу линейного программирования (4.1)–(4.2) следующим образом:

$$\overline{\mathbb{E}}I_{\{2\}}(x) = \inf \{c + 0.4c_1 - 0.3d_1 + 2c_2 - 2d_2\}$$

при ограничениях  $c_i, d_i \geq 0$  и  $\forall x \in \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} c + (c_1 - d_1)I_{\{1\}}(x) + (c_2 - d_2)x + \\ + (c_3 - d_3)(I_{\{3\}}(x) - I_{\{1\}}(x)) \geq I_{\{2\}}(x). \end{aligned}$$

Подставляя значения  $x \in \{1, 2, 3\}$  в ограничение, получим систему ограничений:

$$\begin{aligned} c + (c_1 - d_1) + (c_2 - d_2) + (c_3 - d_3) \cdot (0 - 1) &\geq 0, \\ c + (c_2 - d_2) \cdot 2 &\geq 1, \\ c + (c_2 - d_2) \cdot 3 + (c_3 - d_3) \cdot (1 - 0) &\geq 0. \end{aligned}$$

Решение задачи:  $c = 0$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1/2$ ,  $c_3 = 0$ ,  $d_1 = 2$ ,  $d_2 = 0$ ,  $d_3 = 3/2$ . Отсюда  $\overline{\mathbb{E}}I_{\{2\}}(x) = 0.4$ . Задача программирования для вычисления  $\underline{\mathbb{E}}I_{\{2\}}(x)$  имеет вид:

$$\underline{\mathbb{E}}I_{\{2\}}(x) = \sup \{c + 0.3c_1 - 0.4d_1 + 2c_2 - 2d_2\}$$

при ограничениях  $c_i, d_i \geq 0$  и

$$\begin{aligned} c + (c_1 - d_1) + (c_2 - d_2) + (c_3 - d_3) \cdot (0 - 1) &\leq 0, \\ c + (c_2 - d_2) \cdot 2 &\leq 1, \\ c + (c_2 - d_2) \cdot 3 + (c_3 - d_3) \cdot (1 - 0) &\leq 0. \end{aligned}$$

Решение задачи:  $c = 3$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = 0$ ,  $d_1 = 2$ ,  $d_2 = 1$ ,  $d_3 = 0$ . Отсюда  $\underline{\mathbb{E}}I_{\{2\}}(x) = 0.2$ .

Таким образом, на основе имеющейся информации можно заключить, что вероятность неизменного состояния находится в пределах от 0.2 до 0.4. Эти оценки являются наилучшими при заданной исходной информации.

Теорему продолжения можно объяснить с позиции интервальных вероятностей. Представим исходную информацию в виде неравенств

$$\underline{\mathbb{E}}h_i \leq \sum_{x \in \Omega} h_i(x)\pi(x) \leq \overline{\mathbb{E}}h_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда вычисление верхнего среднего  $\overline{\mathbb{E}}^* g$  признака  $g$  осуществляется решением следующей задачи линейного программирования:

$$\overline{\mathbb{E}}^* g = \sup_{\pi} \sum_{x \in \Omega} g(x)\pi(x) \quad (4.3)$$

при ограничениях

$$\sum_{x \in \Omega} \pi(x) = 1, \quad \pi(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad (4.4)$$

$$\underline{\mathbb{E}}h_i \leq \sum_{x \in \Omega} h_i(x)\pi(x) \leq \overline{\mathbb{E}}h_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

Здесь  $\pi(x)$  – переменные оптимизации. При этом первая часть ограничений (4.4) связана с тем, что  $\pi$  – распределение вероятностей. Все ограничения формируют некоторое множество распределений вероятностей  $\mathcal{P}$ , которое благодаря свойствам линейного программирования является выпуклым<sup>8</sup> и замкнутым<sup>9</sup>. Тогда верхняя граница среднего признака  $g$  определяется выбором такого распределения  $\pi$ , при котором достигается максимум целевой функции, т.е. максимум математического ожидания или точного среднего  $\mathbb{E}g$ . Более того, в соответствии со свойствами линейного программирования, решение задачи (4.3)–(4.5) следует искать на множестве крайних точек множества распределений вероятностей  $\mathcal{P}$ , которое в дальнейшем будем обозначать  $\text{extr}(\mathcal{P})$ .

Интересно отметить, что задачи линейного программирования (4.1)–(4.2) и (4.3)–(4.5) являются двойственными.

<sup>8</sup>Выпуклость множества распределений здесь определяется тем, что для любых двух распределений  $P, Q \in \mathcal{P}$  и  $\lambda \in (0, 1)$  выполняется условие  $\lambda P + (1 - \lambda)Q \in \mathcal{P}$ .

<sup>9</sup>Замкнутость множества определяется тем, что его границы включаются в это множество.



Действительно, переменные оптимизации  $c$ ,  $c_i$  и  $d_i$  в задаче (4.1)–(4.2) соответствуют ограничениям  $\sum_{x \in \Omega} \pi(x) = 1$ ,  $\sum_{x \in \Omega} h_i(x)\pi(x) \leq \overline{\mathbb{E}}h_i$  и  $\underline{\mathbb{E}}h_i \leq \sum_{x \in \Omega} h_i(x)\pi(x)$  в задаче (4.3)–(4.5). Отсюда следует, что  $\overline{\mathbb{E}}g = \overline{\mathbb{E}}^*g$ . Отсюда также следует требование непротиворечивости исходных интервальных средних. Оно полностью соответствует условию  $\mathcal{P} \neq \emptyset$  в (4.3)–(4.5), т.е. для существования решения задачи линейного программирования область допустимых решений не должна быть пустой.

Если область допустимых решений является пустой, то можно выделить три возможных варианта корректировки исходных данных. Первый способ – из множества ограничений (4.5) выделить то, которое является противоречивым, т.е. делает область допустимых решений пустой. Для этого необходимо решать задачу (4.3)–(4.5)  $n$  раз, удаляя из (4.5) по одному ограничению. Данный подход значительно усложняется, если два и более ограничений делают область допустимых решений пустой. Второй способ – использование моделей второго порядка, которые детально рассмотрены в главе 6. Третий способ – введение в задачу оптимизации искусственных переменных и корректировка исходных интервальных средних [91]. Все три способа имеют свои недостатки и преимущества, и выбор одного из них определяется конкретной задачей.

**Пример 4.2.** Вернемся к примеру 4.1 и найдем границы вероятности второго состояния природы с использованием задачи (4.3)–(4.5). Задача программирования имеет вид:

$$\overline{\mathbb{E}}I_{\{2\}}(x) = \sup (0 \cdot \pi(1) + 1 \cdot \pi(2) + 0 \cdot \pi(3))$$

при следующих ограничениях:

$$\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1, \quad \pi(x) \geq 0, \quad x \in \{1, 2, 3\},$$

$$0.3 \leq \pi(1) \leq 0.4,$$

$$1 \cdot \pi(1) + 2 \cdot \pi(2) + 3 \cdot \pi(3) = 2,$$

$$0 \leq \pi(3) - \pi(1).$$

Результат решения:  $\pi(1) = 0.3$ ,  $\pi(2) = 0.4$ ,  $\pi(3) = 0.3$ . Отсюда  $\overline{\mathbb{E}}I_{\{2\}}(x) = 0.4$ . Задача вычисления нижней границы искомой вероятности отличается только тем, что “sup” заменяется на “inf”.

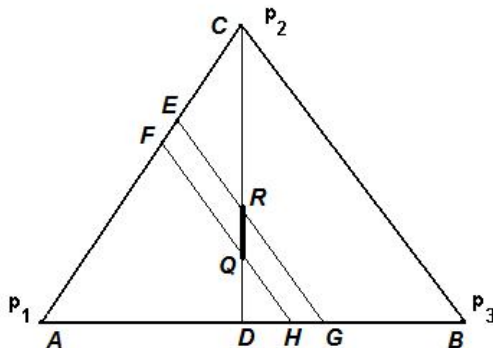


Рис. 4.1. Симплекс вероятностей  $S(1, 3)$  и ограничения

Результат решения:  $\pi(1) = 0.4$ ,  $\pi(2) = 0.2$ ,  $\pi(3) = 0.4$ . Отсюда  $\bar{\mathbb{E}}_{I_{\{2\}}}(x) = 0.2$ . Таким образом, получены те же самые результаты, что и в примере 4.1.

На рис. 4.1 показан симплекс вероятностей  $S(1, 3)$ , на котором отображены ограничения из данного примера<sup>10</sup>. Ограничение  $0.3 \leq \pi(1) \leq 0.4$  соответствует многоугольнику  $FEHG$ ; ограничение  $1 \cdot \pi(1) + 2 \cdot \pi(2) + 3 \cdot \pi(3) = 2$  соответствует отрезку  $CD$ ; и ограничение  $0 \leq \pi(3) - \pi(1)$  — треугольнику  $CDB$ . Пересечением всех ограничений является отрезок  $RQ$ , где точка  $R$  имеет координаты  $\pi_R = (0.3, 0.4, 0.3)$ , а точка  $Q$  имеет координаты  $\pi_Q = (0.4, 0.2, 0.4)$ . Точки  $R$  и  $Q$  являются крайними, т.е.  $\text{extr}(\mathcal{P}) = \{\pi_R, \pi_Q\}$ .

Необходимо отметить, что при помощи интервальных вероятностей можно также достаточно просто объяснить аксиомы А1–А4. Таким образом, имеется тесная связь между понятиями и свойствами теории интервальных средних и множеств вероятностей. Однако в общем случае для бесконечного множества  $\Omega$  двойственность не всегда выполняется.

Используя аксиому А4, все нижние средние можно выразить через верхние средние, и наоборот. Поэтому для вывода третьей формы принципа продолжения будем считать, что имеются только верхние средние признаков. Заменяем признаки  $h_i$  признаками

$$h_i^*(x) = h_i(x) - \bar{\mathbb{E}}h_i.$$

<sup>10</sup>Построение симплекса вероятностей было рассмотрено в главе 1.

Такие признаки называются *центрированными*, так как их верхние средние равны 0, т.е.  $\overline{\mathbb{E}h_i^*} = 0$ . Тогда (4.1)–(4.2) можно переписать следующим образом, с учетом того что имеются только верхние средние:

$$\overline{\mathbb{E}g} = \inf \left\{ c + \sum_i c_i \overline{\mathbb{E}h_i^*} \right\} = \inf c$$

при ограничениях  $c_i \geq 0$  и

$$c + \sum_i c_i h_i^*(x) \geq g(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Полученную задачу оптимизации можно записать как

$$\overline{\mathbb{E}g} = \inf \left\{ c : c \geq g(x) - \sum_i c_i h_i^*(x) \right\}. \quad (4.6)$$

Смысл последнего выражения заключается в поиске такой линейной комбинации исходных признаков, которая наименьшим образом отклоняется вверх от функции  $g$ , т.е. является наилучшей верхней аппроксимацией функции  $g$  линейными комбинациями центрированных признаков. Эта форма предложена и детально обоснована Уолли [131] с точки зрения рационального поведения субъекта.

Решение задачи (4.3)–(4.5) имеет интересное свойство [127]. Если  $\Omega$  – конечное множество, содержащее  $m$  исходов, то оптимальная функция распределения вероятностей  $\pi_o$  имеет не более  $M = \min\{m, n+1\}$  ненулевых значений и может быть представлена в виде весовой суммы индикаторных функций

$$\pi_o(x) = \sum_{k=1}^M c_k I_{\{x_k\}}(x).$$

Здесь  $c_k \geq 0$  и  $\sum_{k=1}^M c_k = 1$ ,  $x_k \in \Omega$ ;  $I_{\{x_k\}}(x)$  – индикаторная функция, принимающая значение 1, если  $x = x_k$ . Чем больше число ограничений в задаче (4.3)–(4.5), тем больше  $n$  и тем больше ненулевых значений имеет распределение  $\pi_o$ , если соответствующая исходная информация не является противоречивой.

Если  $\Omega$  – множество действительных чисел, то задачи оптимизации (4.1)–(4.2) и (4.6) остаются без изменений, а задача (4.3)–(4.5) переписывается в следующем виде:

$$\bar{\mathbb{E}}^* g = \sup_{\pi} \int_{\Omega} g(x) dF(x) \quad (4.7)$$

при ограничениях

$$\int_{\Omega} dF(x) = 1, \quad F(x) \text{ – не убывает,} \quad (4.8)$$

$$\mathbb{E}h_i \leq \int_{\Omega} h_i(x) dF(x) \leq \bar{\mathbb{E}}h_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.9)$$

Задача (4.7)–(4.9) может быть также переписана с использованием плотности  $\pi(x) = dF(x)/dx$ . При этом если полученная задача имеет решение, то оптимальная плотность  $\pi_o$  принадлежит классу вырожденных плотностей [127], являющихся весовой суммой функций Дирака, т.е.

$$\pi_o(x) = \sum_{k=1}^{n+1} c_k \delta_{x_k}(x). \quad (4.10)$$

Здесь  $c_k \geq 0$  и  $\sum_{k=1}^{n+1} c_k = 1$ , а  $x_k \in \mathbb{R}$ . Оптимальная функция распределения  $F_o$  является ступенчатой, и ступеньки расположены в точках  $x_k$ , а их величины равны  $c_k$ ,  $k = 1, \dots, n+1$ . Интересно отметить, что число ступенек не больше  $n+1$ . Подставляя оптимальную плотность в (4.7)–(4.9), получим еще одну форму принципа продолжения:

$$\bar{\mathbb{E}}^* g = \sup \sum_{k=1}^{n+1} c_k g(x_k) \quad (4.11)$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^{n+1} c_k = 1, \quad c_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, n+1, \quad (4.12)$$

$$\mathbb{E}h_i \leq \sum_{k=1}^{n+1} c_k h_i(x_k) \leq \bar{\mathbb{E}}h_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.13)$$

Полученная задача не является линейной, и переменными оптимизации здесь являются  $c_k$  и  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, n + 1$ . Несмотря на нелинейность, данная форма весьма полезна для ряда практических задач [96, 98, 105].

Необходимо отметить, что принцип продолжения является универсальным инструментом для вычисления новых оценок и комбинирования имеющихся. Он позволяет обрабатывать и комбинировать разнородную информацию, полученную из различных источников, не внося при этом дополнительных предположений о распределениях случайных величин, которые во многих ситуациях могут быть ошибочными. В то же время это не означает, что при наличии данных о распределениях они не могут использоваться в принципе продолжения. Модели описания неопределенности при известном типе распределений с использованием принципа продолжения достаточно подробно рассмотрены в разделе 6.8.

#### 4.4. Формализация некоторых качественных оценок

При решении практических задач иногда имеется дополнительная информация, связанная с особенностями рассматриваемых случайных явлений. Например, лицо, принимающее решение, может быть уверено в том, что распределение вероятностей соответствующей случайной величины является унимодальным или ее плотность имеет какую-либо определенную форму. Такие оценки не всегда могут быть непосредственно представлены в виде интервальных средних. Поэтому ниже рассмотрены некоторые подходы к формализации таких качественных в большей степени оценок.

##### 4.4.1. Условие унимодальности распределений

Дискретное распределение  $\pi = \{\pi(1), \dots, \pi(t)\}$  является *унимодальным*, если последовательность чисел  $\pi(j+1) - \pi(j)$ ,  $j = 1, \dots, t - 1$ , имеет только одну смену знака в точке  $r$ , которая называется *модой*<sup>11</sup>. Другими словами, для любого

---

<sup>11</sup>Для сокращения записи будем полагать здесь, что  $\Omega = \{1, 2, \dots, t\}$ .

значения  $j \leq r$  выполняется условие  $\pi(j+1) - \pi(j) \geq 0$  и для любого значения  $j \geq r$  выполняется условие  $\pi(j) - \pi(j+1) \geq 0$ .

Рассмотрим, как условие унимодальности может быть использовано в качестве дополнительного ограничения в принципе продолжения. Непосредственно из определения унимодальности следуют следующие ограничения:

$$\sum_{i=1}^m (I_j(i) - I_{j+1}(i)) \cdot \pi(i) \geq 0, \quad j > r,$$

$$\sum_{i=1}^m (I_{j+1}(i) - I_j(i)) \cdot \pi(i) \geq 0, \quad j \leq r,$$

где  $I_j(i) = 1$  при  $j = i$ ,  $I_j(i) = 0$  при  $j \neq i$ .

Необходимо отметить, что данный путь использования условия унимодальности делает задачу линейного программирования достаточно сложной с вычислительной точки зрения, когда значение  $m$  велико. Поэтому в работе [94] предлагается другой подход. Рассмотрим принцип продолжения с условием унимодальности в следующем виде:

$$\bar{\mathbb{E}}g = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^m g(i)\pi(i)$$

при ограничениях (4.4)–(4.5) и

$$\pi(1) \leq \pi(2) \leq \dots \leq \pi(r), \quad \pi(r) \geq \pi(r+1) \geq \dots \geq \pi(m).$$

Введем новую переменную оптимизации

$$z_k = \begin{cases} \pi(k) - \pi(k-1), & k \leq r \\ \pi(k-1) - \pi(k), & k > r \end{cases}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Здесь предполагаем, что  $\pi(0) = 0$ . Заметим, что  $z_k \geq 0$ . Тогда

$$\pi(k) = \begin{cases} \sum_{i=1}^k z_i, & k \leq r \\ \sum_{i=1}^r z_i - \sum_{i=r+1}^k z_i, & k > r \end{cases}.$$

Подставляя значения  $\pi(k)$  в ограничения задачи оптимизации и ее целевую функцию, получим:

$$\bar{\mathbb{E}}g = \sup_{z_1, \dots, z_m} \left\{ \sum_{i=1}^r G(i)z_i - \sum_{i=r+1}^m G(i)z_i \right\}$$

при ограничениях  $z_k \geq 0$ ,  $k = 1, \dots, m$ ,

$$\underline{\mathbb{E}}h_j \leq \sum_{i=1}^r H_j(i)z_i - \sum_{i=r+1}^m H_j(i)z_i \leq \overline{\mathbb{E}}h_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Здесь

$$H_j(i) = \sum_{k=i}^m h_j(k), \quad G(i) = \sum_{k=i}^m g(k).$$

Переменные  $z_k$  не могут быть значениями распределения вероятностей, так как  $\sum_{i=1}^m z_i \neq 1$ . Поэтому преобразуем эти переменные таким образом, чтобы получить новую функцию распределения вероятностей. Для этого используем дополнительное ограничение  $\sum_{i=1}^m \pi(i) = 1$ . После подстановки значений  $z_k$  в это ограничение получим:

$$\sum_{i=1}^r (m-i+1)z_i - \sum_{i=r+1}^m (m-i+1)z_i = 1.$$

Используя равенство

$$\sum_{i=r+1}^m (m-i+1) = (m-r+1)(m-r)/2,$$

обозначив

$$w_i = \frac{2 + (m-r+1)(m-r)}{2(m-i+1)}$$

и введя новые переменные

$$y_k = \begin{cases} z_k/w_k, & k \leq r \\ (1-z_k)/w_k, & k > r \end{cases},$$

получим:

$$z_k = \begin{cases} y_k w_k, & k \leq r \\ 1 - y_k w_k, & k > r \end{cases}.$$

Тогда переменные  $y_k$  удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^m y_k = 1, \quad y_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Подставляя полученные переменные  $y_k$  в рассматриваемую задачу программирования, получим:

$$\overline{\mathbb{E}}g = \sup_{y_1, \dots, y_m} \left\{ \sum_{i=1}^m (i)y_i - \sum_{i=r+1}^m G(i) \right\}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^m y_i = 1, \quad y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\underline{\mathbb{E}}h_j + \sum_{i=r+1}^m H_j(i) \leq \sum_{i=1}^m A_j(i)y_i \leq \overline{\mathbb{E}}h_j + \sum_{i=r+1}^m H_j(i), \quad j \leq n.$$

Здесь

$$C(i) = w_i G(i) = w_i \sum_{k=i}^m g(k),$$

$$A_j(i) = w_i H_j(i) = w_i \sum_{k=i}^m h_j(k).$$

Таким образом, получена задача линейного программирования с небольшим числом ограничений, решение которой не представляет значительных трудностей.

Рассмотрим теперь случай, когда  $\Omega = \mathbb{R}$ . В соответствии с условием Хинчина [180], распределение вероятностей  $F$  является унимодальным с модой в точке 0, если оно представляется в виде  $F(t) = \int_0^1 G(t/x)dx$ . Здесь  $G$  – произвольное распределение вероятностей. В работе [93] показано, что добавление условия унимодальности с модой в точке  $r$  сводится к замене признака  $g$  в целевой функции на признак

$$\tilde{g}_r(x) = x^{-1} \begin{cases} -\int_0^0 g(t+r)dt, & x < 0 \\ \int_0^x g(t+r)dt, & x \geq 0 \end{cases},$$

а признаков  $h_j(x)$  в ограничениях на признаки

$$\tilde{h}_{rj}(x) = x^{-1} \begin{cases} -\int_0^0 h_j(t+r)dt, & x < 0 \\ \int_0^x h_j(t+r)dt, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Например, если  $g(x) = x^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то

$$\tilde{g}_r(x) = \frac{(x+r)^{k+1} - r^{k+1}}{x(k+1)}.$$

Если  $g(x) = I_{[c,d]}(x)$ ,  $0 \leq c \leq d$ , то

$$\tilde{g}_r(x) = x^{-1} [\min(d, \max(c, x+r)) - \max(c, \min(d, r))].$$

Последующий анализ не отличается от обычного использования принципа продолжения.



#### 4.4.2. Эксцесс, асимметрия и дисперсия

Распределения вероятностей также имеют ряд характеристик, определяющих их форму. К ним относятся эксцесс, асимметрия и дисперсия [148]. Поведение функции плотности в районе его модального значения определяет ее островершинность, количественной характеристикой которой является *эксцесс*. Мерой эксцесса является коэффициент эксцесса

$$\beta_1 = \mathbb{E}_\pi X^4 - 3(\mathbb{E}_\pi X^2)^2.$$

Распределения с более высокой и более острой вершиной кривой плотности имеют положительный эксцесс, а с менее острой – отрицательный. Очевидно, что  $\beta_1$  является “нелинейной” характеристикой благодаря члену  $(\mathbb{E}_\pi X^2)^2$ . Поэтому ее представление в виде интервального среднего представляет некоторые затруднения и необходимо найти подход для учета возможной дополнительной информации в виде коэффициента эксцесса.

Пусть имеется информация о том, что  $\beta_1 \geq 0$ . Это ограничение делает принцип продолжения нелинейным. Однако задачу (4.3)–(4.5) можно свести к параметрической задаче линейного программирования. Обозначим  $\mathbb{E}_\pi X^2 = z$ . Тогда нелинейное ограничение  $\beta_1 \geq 0$  можно заменить двумя линейными ограничениями

$$\mathbb{E}_\pi(X^2 - z) = 0, \mathbb{E}_\pi(X^4 - 3z^2) \geq 0.$$

Здесь  $z \geq 0$  – параметр в параметрической задаче линейного программирования. Задача (4.1)–(4.2) в этом случае принимает вид

$$\bar{\mathbb{E}}g_z = \inf \left\{ c + \sum_{i=1}^n (c_i \bar{\mathbb{E}}h_i - d_i \underline{\mathbb{E}}h_i) + (v_1 - w_1)z - 3w_2z^2 \right\}$$

при ограничениях  $c_i, d_i, v_1, w_1, w_2 \geq 0$  и  $\forall x \in \Omega$ ,

$$c + \sum_{i=1}^n (c_i - d_i)h_i(x) + (v_1 - w_1)x^2 + (v_2 - w_2)x^4 \geq g(x).$$

Таким образом, вычисление интервального среднего признака  $g$  при дополнительной информации об эксцессе сводится к множеству задач линейного программирования, каждая из которых зависит от значения параметра  $z$ . Результирующие значения интервальных средних определяются как

$$\underline{\mathbb{E}}g = \min_z \underline{\mathbb{E}}_z g, \quad \overline{\mathbb{E}}g = \max_z \overline{\mathbb{E}}_z g.$$

*Асимметрия* как степень скошенности распределения [148] определяется из выражения

$$\beta_2 = \frac{\mathbb{E}_\pi \{(x - \mathbb{E}_\pi X)^3\}}{[\mathbb{E}_\pi \{(x - \mathbb{E}_\pi X)^2\}]^{3/2}}.$$

Симметричные распределения имеют нулевую асимметрию. Распределения с “длинной частью” кривой плотности, расположенной справа от ее вершины, характеризуются положительной асимметрией. Распределения с “длинной частью” кривой плотности, расположенной слева от ее вершины, имеют отрицательную асимметрию. Пусть дополнительная информация имеет вид  $\beta_2 \geq 0$  или

$$\mathbb{E}_\pi X^3 - 3\mathbb{E}_\pi X^2 \mathbb{E}_\pi X + 2(\mathbb{E}_\pi X)^3 \geq 0.$$

Обозначим  $\mathbb{E}_\pi X = z$ . Тогда нелинейное ограничение  $\beta_2 \geq 0$  можно заменить двумя линейными ограничениями:

$$\mathbb{E}_\pi X = z, \quad \mathbb{E}_\pi X^3 - 3z\mathbb{E}_\pi X^2 + 2z^3 \geq 0.$$

Последующее использование полученных ограничений аналогично тому, как это было выполнено при рассмотрении эксцесса.

Существует также информация о значениях *дисперсии* случайной величины, например, дисперсия меньше, чем квадрат математического ожидания. Дисперсия определяется в виде нелинейного ограничения

$$\text{var}(x) = \mathbb{E}_\pi X^2 - (\mathbb{E}_\pi X)^2.$$

Обозначая  $\mathbb{E}_\pi X = z$  и используя вышеприведенный пример  $\text{var}(x) \leq (\mathbb{E}_\pi X)^2$ , получим два линейных ограничения

$\mathbb{E}_\pi(X - z) = 0$  и  $\mathbb{E}_\pi X^2 - 2z^2 \leq 0$ . Последующие вычисления аналогичны рассмотренным выше.

Таким образом, информация о форме функции плотности вероятности случайной величины приводит к необходимости решать параметрическую задачу линейного программирования.

## 4.5. Условные интервальные средние

Предположим, что имеется интервальная модель  $\{\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathbb{E}}, \overline{\mathbb{E}}\}$ , интервальные средние которой формируют некоторое множество распределений вероятностей  $\mathcal{P}$ . Как в этом случае найти нижнее и верхнее средние признака  $g$  при условии, что произошло некоторое событие  $B \subseteq \Omega$ ? Предположим, что функция распределения вероятностей  $\pi$  рассматриваемой случайной величины известна. Тогда можно записать выражение для условного математического ожидания [152]

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\pi(g|B) &= \frac{\mathbb{E}_\pi(g(x) \cdot I_B(x))}{\Pr\{B\}} = \\ &= \frac{\sum_{x \in \Omega} g(x) \cdot I_B(x) \cdot \pi(x)}{\sum_{x \in \Omega} I_B(x) \cdot \pi(x)}. \end{aligned}$$

Так как на самом деле точное распределение вероятностей  $\pi$  не всегда известно, а известно только то, что оно принадлежит множеству  $\mathcal{P}$ , т.е.  $\pi \in \mathcal{P}$ , то для вычисления условного интервального среднего необходимо найти минимум и максимум среднего  $\mathbb{E}_\pi(g|B)$  по всем  $\pi \in \mathcal{P}$ . Другими словами, для вычисления, например, верхнего условного среднего требуется решить задачу оптимизации

$$\overline{\mathbb{E}}(g|B) = \sup_{\pi} \frac{\sum_{x \in \Omega} g(x) \cdot I_B(x) \cdot \pi(x)}{\sum_{x \in \Omega} I_B(x) \cdot \pi(x)}$$

при ограничениях (4.4)–(4.5).

Эта задача является задачей дробно-линейного программирования. Она сводится к обычной задаче линейного про-

граммирования путем несложных преобразований. Введем новую переменную

$$y = \frac{1}{\sum_{x \in \Omega} I_B(x) \cdot \pi(x)}$$

и обозначим новую функцию  $\rho(x) = y \cdot \pi(x)$ .

Тогда имеет место следующая задача оптимизации:

$$\bar{\mathbb{E}}(g|B) = \sup_{y, \rho} \sum_{x \in \Omega} g(x) \cdot I_B(x) \cdot \rho(x)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \Omega} h_i(x) \cdot \rho(x) - y \cdot \bar{\mathbb{E}}h_i &\leq 0, \\ \sum_{x \in \Omega} h_i(x) \cdot \rho(x) - y \cdot \underline{\mathbb{E}}h_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \sum_{x \in \Omega} I_B(x) \cdot \rho(x) &= 1, \\ \rho(x) &\geq 0, \\ \sum_{x \in \Omega} \rho(x) - y &= 0. \end{aligned}$$

Здесь переменными оптимизации являются  $y$  и  $\rho(x)$ ,  $x \in \Omega$ . Соответствующая двойственная задача имеет вид

$$\bar{\mathbb{E}}(g|B) = \inf d$$

при ограничениях  $d, c \in \mathbb{R}$ ,  $c_i, e_i \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} c + \sum_{i=1}^n (c_i - e_i) h_i(x) + d \cdot I_B(x) &\geq g(x) \cdot I_B(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ c + \sum_{i=1}^m (c_i \cdot \bar{\mathbb{E}}h_i c_i - e_i \cdot \underline{\mathbb{E}}h_i) &\leq 0. \end{aligned}$$

Если на основе имеющейся информации  $\{\Omega, \mathcal{F}, \underline{\mathbb{E}}, \bar{\mathbb{E}}\}$  определить нижнюю  $\underline{P}(B)$  и верхнюю  $\bar{P}(B)$  вероятности события

$B$ , то задачу для вычисления, например, верхнего условного среднего можно представить в следующем виде [161]:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}}(g|B) &= \\ &= \max_{\underline{P}(B) \leq P(B) \leq \overline{P}(B)} \frac{\min_{c \in \mathbb{R}} [\overline{\mathbb{E}}((g(x) - c) \cdot I_B(x)) + cP(B)]}{P(B)}. \end{aligned}$$

Уолли предложил для вычисления условных интервальных средних использовать обобщенное правило Байеса [131], согласно которому, например, верхнее условное среднее  $\overline{\mathbb{E}}(g|B)$  – это значение  $\mu$ , такое что

$$\overline{\mathbb{E}}((g(x) - \mu) \cdot I_B(x)) = 0.$$

Приведенное уравнение в некоторых случаях может быть решено в явном виде. Решение также может быть получено численно при помощи итерационного алгоритма, предложенного Уолли [131]

$$\mu_{i+1} = \mu_i + \frac{2\overline{\mathbb{E}}((g(x) - \mu_i) \cdot I_B(x))}{\overline{P}(B) + \underline{P}(B)}.$$

В работе [126] показано, что все вышеприведенные способы определения условного интервального среднего эквивалентны. Поэтому при решении практических задач выбирается наиболее удобный с точки зрения расчетов способ.

**Пример 4.3.** Вернемся к примеру 4.1 и определим, как изменятся границы вероятности неизменного состояния экономики при условии, что не наблюдался спад, т.е.  $B = \{x_1, x_2\}$ . Тогда

$$\overline{\mathbb{E}}(I_{\{2\}}(x)|B) = \sup_{\rho} \rho(2)$$

при ограничениях  $\rho(i) \geq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned} \rho(1) - y \cdot 0.4 &\leq 0, \\ \rho(1) - y \cdot 0.3 &\geq 0, \\ 1 \cdot \rho(1) + 2 \cdot \rho(2) + 3 \cdot \rho(3) - y \cdot 2 &= 0, \\ \rho(3) - \rho(1) - y \cdot 0 &\geq 0, \\ \rho(1) + \rho(2) &= 1, \\ \rho(1) + \rho(2) + \rho(3) - y &= 0. \end{aligned}$$

Решение задачи:  $\rho(1) = 3/7$ ,  $\rho(2) = 4/7$ ,  $\rho(3) = 3/7$ ,  $y = 10/7$ . Отсюда  $\bar{\mathbb{E}}(I_{\{2\}}(x)|B) = 4/7$ . Аналогичным образом вычисляем нижнюю границу  $\mathbb{E}(I_{\{2\}}(x)|B) = 1/3$ . Таким образом, исходный интервал вероятностей  $[0.2, 0.4]$  после наблюдения события  $B$  увеличился и стал равным  $[1/3, 4/7]$ .

## 4.6. Независимость интервальных средних

В отличие от классической теории вероятностей, где при наличии точных законов распределения имеет место только одно условие независимости двух случайных величин (см. главу 1), в теории интервальных средних можно определить несколько типов независимости.

### 4.6.1. Отсутствие сведений о независимости или неизвестное взаимодействие

Иногда сложно утверждать о независимости случайных величин, особенно когда одни и те же эксперты предоставляют оценки о них. С другой стороны, практически невозможно оценить степень зависимости в этом случае, если таковая вообще имеет место. Когда наши знания о случайных параметрах ограничены только информацией о каждом параметре отдельно и ничего не известно о взаимодействии этих параметров, модель неизвестного взаимодействия<sup>12</sup> или отсутствия сведений о независимости является наиболее предпочтительной [15, 33]. Пусть  $X$  и  $Y$  – две случайные величины, определенные на  $\Omega_X$  и  $\Omega_Y$ , информация о которых имеет следующий вид:

$$\underline{\mathbb{E}}h_i \leq \sum_{x \in \Omega_X} h_i(x)\pi_X(x) \leq \bar{\mathbb{E}}h_i, \quad i = 1, \dots, n_X, \quad (4.14)$$

$$\underline{\mathbb{E}}h_i \leq \sum_{y \in \Omega_Y} h_i(y)\pi_Y(y) \leq \bar{\mathbb{E}}h_i, \quad i = n_X + 1, \dots, n_X + n_Y, \quad (4.15)$$

---

<sup>12</sup>На самом деле, независимость здесь может вообще отсутствовать и рассматривать этот случай в качестве одного из типов независимости не совсем корректно. Однако с точки зрения сравнения различных типов взаимодействия случайных величин неизвестное взаимодействие анализируется в ряду остальных типов независимости.

$$\underline{\mathbb{E}}h_i \leq \sum_{x \in \Omega_X} \sum_{y \in \Omega_Y} h_i(x, y) \pi_{XY}(x, y) \leq \overline{\mathbb{E}}h_i,$$

$$i = n_X + n_Y + 1, \dots, n_X + n_Y + n_{XY}.$$

Для рассматриваемого типа независимости функция распределения вероятностей  $\pi_{XY}(x, y)$  не может быть выражена через маргинальные распределения  $\pi_X(x)$  и  $\pi_Y(y)$ . В то же время ограничения (4.14) и (4.15) можно переписать в следующем виде:

$$\underline{\mathbb{E}}h_i \leq \sum_{x \in \Omega_X} \sum_{y \in \Omega_Y} h_i(x) \pi_{XY}(x, y) \leq \overline{\mathbb{E}}h_i, \quad i = 1, \dots, n_X,$$

$$\underline{\mathbb{E}}h_i \leq \sum_{x \in \Omega_X} \sum_{y \in \Omega_Y} h_i(y) \pi_{XY}(x, y) \leq \overline{\mathbb{E}}h_i,$$

$$i = n_X + 1, \dots, n_X + n_Y.$$

Так как для исходных данных все точные средние можно представить при помощи совместного распределения  $\pi_{XY}(x, y)$ , то принцип продолжения для вычисления верхнего среднего признака  $g(x, y)$  при условии отсутствия сведений о независимости принимает вид<sup>13</sup>

$$\overline{\mathbb{E}}_U g = \inf \left( c + \sum_{i=1}^{n_X+n_Y+n_{XY}} (c_i \overline{\mathbb{E}}h_i - d_i \underline{\mathbb{E}}h_i) \right)$$

при ограничениях  $c_i, d_i \geq 0$  и  $\forall x \in \Omega_X, \forall y \in \Omega_Y,$

$$c + \sum_{i=1}^{n_X} (c_i - d_i) h_i(x) + \sum_{i=n_X+1}^{n_X+n_Y} (c_i - d_i) h_i(y) + \sum_{i=n_X+n_Y+1}^{n_X+n_Y+n_{XY}} (c_i - d_i) h_i(x, y) \geq g(x, y).$$

Отсюда следует, что приведенная задача ничем не отличается от задачи (4.1)–(4.2), за исключением того, что ограничения записываются для всех пар  $(x, y) \in \Omega_X \times \Omega_Y$ . Нижнее среднее вычисляется аналогично.

<sup>13</sup>Средние этого типа обозначим буквой  $U$ .

## 4.6.2. Строгая независимость

Строгая независимость [15, 33] имеет место, если исходы выбора значений неопределенных параметров статистически независимы и только произведения маргинальных распределений вероятностей рассматриваются из всего множества распределений случайных величин<sup>14</sup>. Этот тип независимости является наиболее жестким условием взаимодействия случайных величин. Из условия строгой независимости следует, что знание исхода в эксперименте с одной случайной величиной никаким образом не меняет степени неопределенности об исходе другой случайной величины. Так как рассматриваются только произведения маргинальных распределений вероятностей, то добавляется дополнительное ограничение

$$\pi_{XY}(x, y) = \pi_X(x)\pi_Y(y), \quad \forall(x, y) \in \Omega_X \times \Omega_Y. \quad (4.16)$$

Предположим, что имеются оценки вида (4.14) и (4.15). При этом множество распределений  $\pi_X(x)$ , образованное оценками (4.14), обозначим  $\Psi_X$ , а множество распределений  $\pi_Y(y)$ , образованное оценками (4.15), обозначим  $\Psi_Y$ . Тогда верхнее среднее признака  $g$  можно получить как<sup>15</sup>

$$\bar{E}_S g = \sup_{\pi_X \in \Psi_X} \sup_{\pi_Y \in \Psi_Y} \sum_{x \in \Omega_X} \sum_{y \in \Omega_Y} g(x, y) \pi_Y(y) \pi_X(x).$$

Ограничение (4.16) является нелинейным. Поэтому нельзя записать принцип продолжения в виде простой задачи линейного программирования. Однако последовательное приближение исходной задачи к линейной может быть выполнено для вычисления интервальных средних новых признаков. Основная идея [61] заключается в том, что при невозможности использования нелинейного ограничения (4.16) можно тем не менее включить дополнительные линейные ограничения, соответствующие произведению средних различных признаков.

---

<sup>14</sup>Кузнецов в работе [161] называет этот тип независимости “независимым произведением”.

<sup>15</sup>Средние этого типа обозначим буквой  $S$ .



Если две случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то из независимости следует

$$\mathbb{E}_S (h_1(X) \cdot h_2(Y)) = \mathbb{E}h_1(X) \cdot \mathbb{E}h_2(Y),$$

где  $h_1$  и  $h_2$  – произвольные функции.

Следовательно, зная то что

$$\mathbb{E}h_1(X) \in [\underline{\mathbb{E}h_1}, \overline{\mathbb{E}h_1}] \text{ и } \mathbb{E}h_2(Y) \in [\underline{\mathbb{E}h_2}, \overline{\mathbb{E}h_2}],$$

можно записать

$$\mathbb{E}_S (h_1(X) \cdot h_2(Y)) \in [\underline{\mathbb{E}h_1}, \overline{\mathbb{E}h_1}] \cdot [\underline{\mathbb{E}h_2}, \overline{\mathbb{E}h_2}].$$

Здесь произведение двух интервалов осуществляется в соответствии с правилами стандартной интервальной арифметики [149]. В итоге имеем линейное ограничение, которое может использоваться в принципе продолжения. Результирующие нижнее  $\underline{\mathbb{E}}_S^{(1)}g$  и верхнее  $\overline{\mathbb{E}}_S^{(1)}g$  средние признака  $g(x, y)$  в этом случае будет приближением для точных значений нижнего  $\underline{\mathbb{E}}_Sg$  и верхнего  $\overline{\mathbb{E}}_Sg$  средних. При этом  $\underline{\mathbb{E}}_S^{(1)}g \leq \underline{\mathbb{E}}_Sg$  и  $\overline{\mathbb{E}}_S^{(1)}g \geq \overline{\mathbb{E}}_Sg$ . С другой стороны, зная интервальные средние признаков  $h_1$  и  $h_2$ , можно их продолжить на средние других признаков  $h_1^{(1)}$  и  $h_2^{(1)}$ , для которых выполняется условие

$$\mathbb{E}_S \left( h_1^{(1)}(X) \cdot h_2^{(1)}(Y) \right) \in [\underline{\mathbb{E}h_1^{(1)}}, \overline{\mathbb{E}h_1^{(1)}}] \cdot [\underline{\mathbb{E}h_2^{(1)}}, \overline{\mathbb{E}h_2^{(1)}}].$$

Добавляя полученные границы к ограничениям и решая задачу линейного программирования, получаем второе приближение границ среднего функции  $g$ :  $\underline{\mathbb{E}}_S^{(2)}g$  и  $\overline{\mathbb{E}}_S^{(2)}g$ . Продолжая рассмотренную процедуру далее, получим линейные ограничения вида

$$\mathbb{E}_S \left( h_1^{(k)}(X_1) \cdot h_2^{(k)}(X_2) \right) \in [\underline{\mathbb{E}h_1^{(k)}}, \overline{\mathbb{E}h_1^{(k)}}] \cdot [\underline{\mathbb{E}h_2^{(k)}}, \overline{\mathbb{E}h_2^{(k)}}],$$

которые совместно с предыдущими ограничениями обеспечивают вычисление более точных границ для  $\mathbb{E}_Sg$ .

**Пример 4.4.** Рассмотрим две случайные величины  $X$  и  $Y$ , принимающие значения из  $\Omega_X = \Omega_Y = \{0, 1\}$ . Пусть  $g(X, Y) = \max(X, Y)$ . Известно, что  $\underline{P}_1 = \underline{\mathbb{E}}X$ ,  $\overline{P}_1 = \overline{\mathbb{E}}X$ ,  $\underline{P}_2 = \underline{\mathbb{E}}Y$  и  $\overline{P}_2 = \overline{\mathbb{E}}Y$ . Условие независимости можно записать как  $\mathbb{E}_S(XY) \in [\underline{P}_1\underline{P}_2, \overline{P}_1\overline{P}_2]$ . Тогда принцип продолжения для первого приближения имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}}_S^{(1)} g &= \\ &= \inf (c + c_1\overline{P}_1 - d_1\underline{P}_1 + c_2\overline{P}_2 - d_2\underline{P}_2 + c_{12}\overline{P}_1\overline{P}_2 - d_{12}\underline{P}_1\underline{P}_2) \end{aligned}$$

при ограничениях  $c_1, d_1, c_2, d_2, c_{12}, d_{12} \in \mathbb{R}_+$ ,  $c \in \mathbb{R}$  и  $\forall x, y \in \{0, 1\}$ ,

$$c + (c_1 - d_1)x + (c_2 - d_2)y + (c_{12} - d_{12})xy \geq \max(x, y).$$

Отсюда

$$\overline{\mathbb{E}}_S^{(1)} g = \min\{1, \overline{P}_1 + \overline{P}_2 - \underline{P}_1\underline{P}_2\}.$$

Добавим дополнительный признак  $h_2^{(1)}(Y) = Y - 1$ . В этом случае  $\underline{\mathbb{E}}h_2^{(1)} = \underline{P}_2 - 1$ ,  $\overline{\mathbb{E}}h_2^{(1)} = \overline{P}_2 - 1$ . Тогда второе приближение – задача программирования –

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}}_S^{(2)} g &= \inf_{c, c_i, d_i} (c + c_1\overline{P}_1 - d_1\underline{P}_1 + c_2\overline{P}_2 - d_2\underline{P}_2 + c_{12}\overline{P}_1\overline{P}_2 - \\ &\quad - d_{12}\underline{P}_1\underline{P}_2 + c_{22}\underline{P}_1(\overline{P}_2 - 1) - d_{22}\overline{P}_1(\underline{P}_2 - 1)) \end{aligned}$$

при ограничениях  $c_1, d_1, c_2, d_2, c_{12}, d_{12}, c_{22}, d_{22} \in \mathbb{R}_+$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} c + (c_1 - d_1)x + (c_2 - d_2)y + (c_{12} - d_{12})xy + \\ + (c_{22} - d_{22})x(y - 1) \geq \max(x, y), \quad \forall x, y \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\overline{\mathbb{E}}_S^{(2)} g = \min\{1, \overline{P}_1 + \overline{P}_2 - \overline{P}_1\underline{P}_2\}.$$

Пусть  $\underline{P}_1 = 0.2$ ,  $\overline{P}_1 = 0.4$ ,  $\underline{P}_2 = 0.3$ ,  $\overline{P}_2 = 0.5$ . Тогда  $\overline{\mathbb{E}}_S^{(1)} g = 0.84$ ,  $\overline{\mathbb{E}}_S^{(2)} g = 0.78$ . В то же время хорошо известно, что  $\overline{\mathbb{E}}_S g = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 - \overline{P}_1\overline{P}_2 = 0.7$ . Таким образом, добавляя новые признаки и вычисляя их средние, можно получить сколь угодно точные значения для интервальных средних при условии строгой независимости. С другой стороны, из примера видно, что даже в простейших случаях условие независимости существенно усложняет задачи оптимизации, что ограничивает применение рассмотренного метода приближенного вычисления интервальных средних при условии строгой независимости.

Применение интервальных средних в ряде прикладных задач показало, что формы (4.3)–(4.5) и (4.11)–(4.13) при условии строгой независимости оказываются более полезными, чем (4.1)–(4.2). При этом задача (4.11)–(4.13) в случае двух случайных величин,  $\Omega_X = \Omega_Y = \mathbb{R}$ , и при наличии ограничений (4.14) и (4.15) принимает следующий вид:

$$\bar{\mathbb{E}}_S g = \sup_{c_i^{(1)}, c_j^{(2)}, x_i, y_j} \sum_{i=1}^{n_X+1} \sum_{j=1}^{n_Y+1} g(x_i, y_j) \cdot c_i^{(1)} c_j^{(2)}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n_X+1} c_i^{(1)} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n_Y+1} c_j^{(2)} = 1, \quad c_i^{(1)} \geq 0, \quad c_j^{(2)} \geq 0,$$

$$\underline{\mathbb{E}} h_k \leq \sum_{i=1}^{n_X+1} h_k(x_i) c_i^{(1)} \leq \bar{\mathbb{E}} h_k, \quad k = 1, \dots, n_X,$$

$$\underline{\mathbb{E}} h_k \leq \sum_{k=1}^{n_Y+1} h_k(y_i) c_i^{(2)} \leq \bar{\mathbb{E}} h_k, \quad k = n_X + 1, \dots, n_X + n_Y.$$

Нижнее среднее  $\underline{\mathbb{E}}_S g$  вычисляется решением той же самой задачи оптимизации, заменив “sup” на “inf”. Оптимальные плотности вероятности случайных величин  $X$  и  $Y$  имеют вид

$$\pi_{X_o}(x) = \sum_{i=1}^{n_X+1} c_i^{(1)} \delta_{x_i}(x), \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad c_i^{(1)} \in \mathbb{R}_+,$$

$$\pi_{Y_o}(y) = \sum_{i=1}^{n_Y+1} c_i^{(2)} \delta_{y_i}(y), \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad c_i^{(2)} \in \mathbb{R}_+.$$

В работах [58, 96, 98, 102] показано на практических примерах, что рассмотренные выше задачи оптимизации, несмотря на нелинейность, имеют достаточно простые решения в явном виде.

### 4.6.3. Свободные произведения

Будем считать, что для каждого значения  $\pi_{XY}(x, y)$  выполняется условие независимости  $\pi_{XY}(x, y) = \pi_X(x)\pi_Y(y)$ . Кроме того, известны множества маргинальных распределений вероятностей  $\Psi_X, \Psi_Y$ , образованные оценками вида (4.14) и (4.15). Тогда верхнее среднее<sup>16</sup>  $\bar{\mathbb{E}}_F g$  признака  $g$  можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{E}}_F g &= \sup_{\pi_X \in \Psi_X} \sum_{x \in \Omega_X} \left( \sup_{\pi_Y \in \Psi_Y} \sum_{y \in \Omega_Y} g(x, y) \pi_Y(y) \right) \pi_X(x) = \\ &= \bar{\mathbb{E}}^X \left( \bar{\mathbb{E}}^{Y|x} g(x, Y) \right).\end{aligned}$$

Другими словами, для каждого фиксированного значения  $x$  вычисляются верхние средние  $\bar{\mathbb{E}}^{Y|x} g(x, Y)$  в соответствии с маргинальным распределением вероятностей  $\pi_Y$ . Затем полученный набор верхних средних рассматривается как признак  $\bar{\mathbb{E}}^{Y|x} g(x, Y)$  и в соответствии с распределением  $\pi_X(x)$  вычисляется  $\bar{\mathbb{E}}_F g$ . Такой тип независимости называется свободным произведением<sup>17</sup> [161] и имеет место только тогда, когда имеется неполнота информации, т.е. множества распределений вероятностей  $\Psi_X$  и  $\Psi_Y$  содержат более одного распределения. Свободное распределение является ослабленным вариантом строгой независимости, и, следовательно, выполняется условие  $[\underline{\mathbb{E}}_S g, \bar{\mathbb{E}}_S g] \subseteq [\underline{\mathbb{E}}_F g, \bar{\mathbb{E}}_F g]$ .

Важным фактом является то, что в общем случае свободное произведение не является симметричным, т.е.

$$\bar{\mathbb{E}}^X \left( \bar{\mathbb{E}}^{Y|x} g(x, Y) \right) \neq \bar{\mathbb{E}}^Y \left( \bar{\mathbb{E}}^{X|y} g(X, y) \right).$$

Это определяет применимость свободного произведения. Данный тип независимости имеет место, когда определены множества маргинальных распределений вероятностей  $\Psi_X, \Psi_Y$  и можно утверждать, что получение сведений об исходе  $x \in \Omega_X$

<sup>16</sup>Средние этого типа обозначим буквой  $F$ .

<sup>17</sup>Уолли [131] называет этот тип независимости epistemic irrelevance (англ.)

не изменяет нашу степень неопределенности об исходе  $y \in \Omega_Y$ , но не наоборот. Кузнецов приводит следующий пример в качестве пояснения свободного произведения. Пусть первый раз подбрасывается монета так, что вероятность исхода равна  $1/2$ , образуя эксперимент  $X$  с двумя исходами. Другой раз монета не подбрасывается, а показывается некоторым лицом (эксперимент  $Y$ ). Показ производится осмысленным образом, поэтому вероятность орла может быть любой от 0 до 1. Эксперимент  $X$  свободен от  $Y$ , но не независим, так как решение относительно того, какую сторону монеты показывать, может произойти на основании результата подбрасывания. Свобода лишь означает, что о намерении лица, показывающего монету, ничего не известно. Если поменять в примере последовательность действий, то получим совершенно другую модель.

Пример применения рассмотренного типа независимости в практической задаче приведен в работе [100].

#### 4.6.4. Независимость повторений

Предположим, что два эксперимента имеют одно и то же множество возможных исходов  $\Omega_X = \Omega_Y = \Omega$ . Также известно, что случайные величины  $X$  и  $Y$  имеют одно и то же распределение вероятностей, принадлежащее множеству  $\Psi$ . В этом случае имеется не только одинаковая информация о двух экспериментах, но и информация о том, что случайные величины имеют одинаковые распределения. Если известно также, что два эксперимента статистически независимы, то совместное распределение вероятностей имеет вид  $\pi \times \pi$ , где  $\pi \in \Psi$ . При выполнении этих условий предполагается, что имеет место независимость повторений [15, 154]. Идентичность экспериментов с точки зрения распределения вероятностей уменьшает множество допустимых совместных распределений и дает более точные границы интервальных средних, чем строгая независимость.

Необходимо заметить, что существуют и другие типы независимости, например независимость случайных множеств, которая более детально рассмотрена в главе 10, нековариированность [161] и т.д. Главной особенностью всех рассмотренных

типов независимости является тот факт, что они имеют место только при неполной информации.

#### 4.7. Заключение

Особенность теории интервальных средних заключается в том, что она является обобщением таких способов описания неопределенности и неточности, как теория Демпстера–Шейфера и теория возможностей. Действительно, функции доверия и правдоподобия полностью удовлетворяют аксиомам теории интервальных средних A1–A4 и могут быть представлены как интервальные средние индикаторных функций. Более того, они могут быть получены из базовых вероятностей фокальных элементов при помощи теоремы продолжения. Меры возможности и необходимости также удовлетворяют аксиомам A1–A4 и могут быть рассмотрены при помощи интервальных средних. Кроме того, способ определения внутренней и внешней меры, используемый для интерпретации меры возможности в разделе 3.3, полностью совпадает с принципом продолжения в форме (4.3)–(4.5), где имеющиеся в ограничениях интервальные средние – это нижние вероятности  $\alpha_i$  подмножеств множества исходов. Теория интервальных вероятностей или множеств вероятностей вообще являлась предпосылкой для создания теории интервальных средних.

Казалось бы, что теорию интервальных средних благодаря универсальности можно использовать в самых различных ситуациях, заменив ею перечисленные выше подходы к описанию неопределенности и неточности. Однако принцип продолжения во многих случаях представляет из себя достаточно сложную оптимизационную задачу, для которой не только в явном виде, но и численно решение не всегда может быть получено [59, 103, 105, 116, 124]. В то же время вычисления в рамках частных подходов могут быть достаточно простыми и не использовать оптимизационные задачи.

Теория интервальных средних позволяет также объяснить и по новому взглянуть на некоторые особенности других теорий. Например, интерпретация мер возможности и необходи-

мости не всегда была понятна многим специалистам, особенно в прикладных областях. Также не совсем четко были определены варианты использования операций в теории возможностей. Например, использование принципа обобщения Заде с операциями “min” и “max” при большом количестве переменных фактически приводит к полной неопределенности, что неприемлемо для практических задач. Интервальные средние позволяют объяснить использование различных операций, исходя из свойств различных типов независимости [95].

Теория интервальных средних уже в настоящее время нашла применение в самых различных прикладных областях: в анализе надежности сложных систем [121], в теории игр [68], в анализе риска [90, 113, 116, 130], в прогнозировании изменения климата [60] и многих других областях, где неполнота и разнородность исходной информации является наиболее важным фактором или свойством.

Следует отметить, что теория интервальных средних и принцип продолжения будут играть основную роль в задачах принятия решений и анализа риска при комбинировании и обработке разнородной информации о ситуациях принятия решений, которые рассматриваются в этой книге. Фактически большинство методов принятия решений будут основаны на поиске эффективных подходов и способов решения задач оптимизации, определяемых принципом продолжения в различных его формах.

## Глава 5

### Байесовский подход

Прошедшее нужно знать не потому, что оно прошло, а потому что, уходя, не умело убрать своих последствий.

*Василий Осипович Ключевский*

#### 5.1. Основные положения байесовского подхода

Как отмечается в [173], многие статистические задачи независимо от методов их решения обладают общим свойством: до того как получен конкретный набор данных, в качестве потенциально приемлемых для изучаемой ситуации рассматривается несколько вероятностных моделей. После того как получены данные, возникает выраженное в некотором виде знание об относительной приемлемости этих моделей. Одним из способов “пересмотра” относительной приемлемости вероятностных моделей является *байесовский подход*, основой которого выступает известная *теорема Байеса*.

Несмотря на то что так называемая традиционная частотная школа статистического вывода, представленная работами таких ученых, как Фишер, Ньюмен, Пирсон, и многими другими, доминирует в статистике в настоящее время, байесовские методы показали чрезвычайно стремительное развитие в последние десятилетия. Причина этого заключается в том, что байесовский подход имеет ряд существенных преимуществ, которые делают его достаточно привлекательным для широкого применения [174]. Детальный анализ большинства достоинств байесовского подхода в статистике по сравнению



с традиционным частотным подходом представлен в работе Ферсона [32].

Основное отличие байесовского подхода от других статистических подходов состоит в том, что до того, как будут получены данные, лицо, принимающее решение, или статистик рассматривает степени своего доверия к возможным моделям и представляет их в виде вероятностей. Как только данные получены, теорема Байеса позволяет рассчитать новое множество вероятностей, которые представляют пересмотренные степени доверия к возможным моделям, учитывающие новую информацию, поступившую благодаря данным.

Статистические данные зачастую отсутствуют в реальных задачах анализа риска и принятия решений, что делает использование многих традиционных частотных подходов неправомерным [148]. Имеющаяся в распоряжении информация может содержать только субъективные оценки в виде экспертных оценок и суждений. Более того, ситуация, в которой принимается решение, может быть вообще новой и никогда ранее не анализируемой. Эти особенности усложняют процесс принятия решений и могут поставить под сомнение какие-либо выводы и заключения. Поэтому в такой ситуации байесовский подход может оказаться весьма полезным и эффективным.

Основой байесовского подхода в статистике является теорема Байеса. Предположим, что мы наблюдаем некоторую случайную величину  $Y$ , которая имеет плотность вероятности  $p(y|\theta)$  с параметрами  $\theta$ , но хотим сделать вывод о другой случайной величине  $\theta$ , имеющей некоторое распределение вероятностей  $\pi(\theta)$ . Пусть в результате наблюдений получены статистические данные  $y$  (значения случайной величины  $Y$ ). С одной стороны, из определения условной вероятности следует, что

$$\Pr(\theta|y) = \Pr(y, \theta) / \Pr(y).$$

С другой стороны, из определения условной вероятности также следует, что

$$\Pr(y, \theta) = \Pr(y|\theta) \Pr(\theta).$$

Подставляя второе равенство в первое, получаем известную формулу Байеса:

$$\Pr(\theta|y) = \frac{\Pr(y|\theta) \Pr(\theta)}{\Pr(y)}.$$

Если имеется  $m$  возможных переменных  $(\theta_1, \dots, \theta_m)$ , то

$$\Pr(\theta_j|y) = \frac{\Pr(y|\theta_j) \Pr(\theta_j)}{\Pr(y)} = \frac{\Pr(y|\theta_j) \Pr(\theta_j)}{\sum_{i=1}^m \Pr(\theta_i) \Pr(y|\theta_i)}.$$

Распределение  $\Pr(\theta)$  называется *априорным* распределением вероятностей возможных значений  $\theta$  (это распределение принимается прежде, чем получены статистические данные). Распределение  $\Pr(\theta|y)$  называется *апостериорным* распределением значений  $\theta$  при условии, что наблюдались данные  $y$  (это распределение вычисляется после получения статистических данных). При этом переменные  $\theta_j$  называются *гипотезами*, а  $y$  – *свидетельствами*, поддерживающими гипотезы.

**Пример 5.1.** Предположим, что необходимо определить надежность некоторой фирмы. При этом все фирмы можно разделить на три основные группы в зависимости от надежности. Первая группа – фирмы средней надежности, вторая группа – фирмы высокой надежности, третья группа – фирмы низкой надежности. Таким образом при анализе конкретной фирмы имеются три гипотезы:  $\theta_i$  – фирма принадлежит  $i$ -й группе,  $i = 1, 2, 3$ . При этом из общей статистики организаций, занимающихся аналогичной деятельностью, известно, что 50% фирм имеют среднюю надежность, 30% фирм имеют высокую надежность, 20% фирм имеют низкую надежность. Используя эти данные, можно определить априорные вероятности гипотез:  $\Pr(\theta_1) = 0.5$ ,  $\Pr(\theta_2) = 0.3$ ,  $\Pr(\theta_3) = 0.2$ . Одними из признаков (свидетельствами) надежности фирмы является наличие прибыли у фирмы ( $y_1$ ) и своевременный расчет с бюджетом ( $y_2$ ). В реальных задачах таких признаков имеется обычно намного больше. Однако мы ограничимся только двумя, чтобы показать использование байесовского подхода. Из анализа аналогичных предприятий известно, что прибыль имеют 40% фирм средней надежности, 80% фирм высокой надежности и 30% фирм низкой надежности. Отсюда можно записать условные вероятности  $\Pr(y_1|\theta_1) = 0.4$ ,  $\Pr(y_1|\theta_2) = 0.8$  и  $\Pr(y_1|\theta_3) = 0.3$ . Также известно, что выплачивают в бюджет 70% фирм средней надежности, 90% фирм высокой надежности и 0% фирм низкой надежности. Отсюда можно

Таблица 5.1. Априорные и условные вероятности

$i$	1	2	3
$\Pr(\theta_i)$	0.5	0.3	0.2
$\Pr(y_1 \theta_i)$	0.4	0.8	0.3
$\Pr(y_2 \theta_i)$	0.7	0.9	0.0

записать условные вероятности  $\Pr(y_2|\theta_1) = 0.7$ ,  $\Pr(y_2|\theta_2) = 0.9$  и  $\Pr(y_2|\theta_3) = 0$ . Все исходные данные приведены в табл. 5.1.

Необходимо отметить, что условные вероятности  $\Pr(y^c|\theta_i)$  противоположных свидетельств определяются из очевидного условия  $\Pr(y^c|\theta_i) = 1 - \Pr(y|\theta_i)$ . Так, если фирма не имеет прибыли, то  $\Pr(y_1^c|\theta_1) = 0.6$ ,  $\Pr(y_1^c|\theta_2) = 0.2$ ,  $\Pr(y_1^c|\theta_3) = 0.7$ .

В процессе сбора фактов вероятности гипотез будут повышаться, если факты поддерживают их, или уменьшаться, если факты опровергают их. Предположим, что мы имеем только одно свидетельство  $y_1$ , т.е. с вероятностью единица конкретная фирма имеет прибыль. Наблюдая  $y_1$ , мы вычисляем апостериорные вероятности для гипотез согласно формуле Байеса для одного свидетельства:

$$\Pr(\theta_1|y_1) = \frac{\Pr(y_1|\theta_1) \Pr(\theta_1)}{\sum_{i=1}^3 \Pr(y_1|\theta_i) \Pr(\theta_i)} = 0.4,$$

$$\Pr(\theta_2|y_1) = \frac{\Pr(y_1|\theta_2) \Pr(\theta_2)}{\sum_{i=1}^3 \Pr(y_1|\theta_i) \Pr(\theta_i)} = 0.48,$$

$$\Pr(\theta_3|y_1) = \frac{\Pr(y_1|\theta_3) \Pr(\theta_3)}{\sum_{i=1}^3 \Pr(y_1|\theta_i) \Pr(\theta_i)} = 0.12.$$

Из результатов расчетов видно, что после того как  $y_1$  произошло (стало известно, что фирма имеет прибыль), доверие к гипотезам  $\theta_1$  и  $\theta_3$  понизилось, в то время как доверие к  $\theta_2$  возросло. Таким образом, мы модифицировали априорные вероятности и получили апостериорные вероятности гипотез. Если продолжить модификацию или пересчет на основе новых свидетельств, то полученные выше апостериорные вероятности гипотез становятся априорными. Например, предположим, что анализируемая фирма платит в бюджет, т.е. наблюдается  $y_2$ . Тогда апостериорные вероятности вычисляются по тем же формулам с заменой вероятностей  $\Pr(\theta_i)$  вероятностями  $\Pr(\theta_i|y_1)$  и свидетельств  $y_1$  свидетельствами  $y_2$ , вычисленными на предыдущем этапе. В результате расчетов получаем  $\Pr(\theta_1|y_2) = 0.393$ ,  $\Pr(\theta_2|y_2) = 0.607$ ,  $\Pr(\theta_3|y_2) = 0$ .

Необходимо отметить, что те же результаты можно получить за один шаг, предполагая, что одновременно получены два свидетельства и эти свидетельства независимы. В этом случае апостериорная

вероятность имеет вид

$$\Pr(\theta_j|y_1, y_2) = \frac{\Pr(y_1, y_2|\theta_j) \Pr(\theta_j)}{\sum_{i=1}^3 \Pr(y_1, y_2|\theta_i) \Pr(\theta_i)}.$$

Предположение независимости свидетельств позволяет записать

$$\Pr(y_1, y_2|\theta_j) = \Pr(y_1|\theta_j) \cdot \Pr(y_2|\theta_j).$$

Отсюда

$$\Pr(\theta_j|y_1, y_2) = \frac{\Pr(y_1|\theta_j) \cdot \Pr(y_2|\theta_j) \Pr(\theta_j)}{\sum_{i=1}^3 \Pr(y_1|\theta_i) \cdot \Pr(y_2|\theta_i) \cdot \Pr(\theta_i)}.$$

Аналогичные результаты можно получить и для непрерывного случая. Пусть  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$  – вектор  $m$  непрерывных случайных величин, определенный на множестве  $\Omega^m$ . Тогда теорема Байеса принимает вид

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)\pi(\theta)}{p(y)} = \frac{p(y|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Omega^m} p(y, \theta)d\theta}.$$

Здесь  $\pi(\theta)$  – априорная плотность вектора параметров  $\theta$ ,  $p(\theta|y)$  – апостериорная плотность, вычисляемая исходя из предположения априорной плотности  $\pi(\theta)$  и наблюдаемых данных  $y$ .

Метод максимума функции правдоподобия, используемый в статистическом оценивании параметров распределения, и байесовский подход достаточно близки. Пусть  $L(\theta|y)$  – функция правдоподобия. Метод максимума функции правдоподобия заключается в том, что параметры  $\theta \in \Omega^m$  выбираются таким образом, чтобы максимизировать функцию правдоподобия как функцию от  $\theta$ . Правомерность использования метода максимума функции правдоподобия основывается на свойствах выборки большого объема, а именно если размер выборочных данных достаточно большой, то можно предположить:

1) нормальность статистики среднего значения случайной величины;

2) статистика отношения правдоподобия имеет  $\chi^2$ -распределение.

Однако эти замечательные свойства не выполняются, если размер выборки мал. Поэтому альтернативным подходом является попытка начать статистический вывод с некоторых исходных предположений (догадок) о распределении неизвестных параметров  $\pi(\theta)$ . Тогда, используя теорему Байеса, можно вычислить значения апостериорного распределения:

$$p(\theta|y) = \frac{1}{p(y)}p(y|\theta)\pi(\theta).$$

Заметим, что  $p(y|\theta) = L(\theta|y)$  – функция правдоподобия,  $1/p(y)$  – некоторая постоянная величина по отношению к параметрам  $\theta$ . Поэтому апостериорное распределение пропорционально произведению функции правдоподобия на априорное распределение или

$$p(\theta|y) \propto L(\theta|y)\pi(\theta),$$

где символ  $\propto$  означает пропорциональность.

Если в задаче о надежности фирм функция правдоподобия была известна в явном виде, т.е. в виде набора вероятностей  $p(y|\theta)$  (условных к значению параметра), то в общем случае эта функция представляется в виде некоторой функции от параметров, что значительно усложняет вычисления.

Постоянная величина  $p(y)$  вычисляется исходя из условия нормализации, т.е. сумма апостериорных вероятностей или интеграл апостериорной плотности по множеству значений параметров  $\theta$  равен единице. Тогда, например, для непрерывного случая

$$p(y) = \int_{\Omega^m} p(y|\theta)\pi(\theta)d\theta.$$

Зависимость апостериорных вероятностей от априорных показывает, как много информации о значениях неизвестного параметра содержится в статистических данных. Если апостериорные вероятности сильно зависят от априорных, то, скорее всего, данные содержат мало информации. Если апостериорные вероятности слабо зависят от выбора априорного распределения, то данные являются информативными.

Таким образом, при использовании байесовского подхода кроме распределения вероятностей рассматриваемой случайной величины  $Y$  предполагается использование некоторого априорного распределения параметров  $\theta$  функции распределения величины  $Y$ . Опираясь на статистические данные, априорное распределение параметров  $\theta$  модифицируется путем умножения на функцию правдоподобия и нормализации. Результатом модификации является апостериорное распределение параметров  $\theta$ . Другими словами, параметры распределения случайной величины сами являются случайными величинами с некоторым распределением, т.е. мы имеем неопределенность второго порядка: “случайные параметры случайной величины” или “распределение параметров распределения”.

Как теперь найти окончательно оценки параметров  $\theta$ ? Для простоты будем считать, что вектор состоит из одного элемента  $\theta$ . Наибольшее распространение получили три точечные оценки параметра  $\theta$ .

1. *Мода*. Оценка  $\hat{\theta}$  параметра выбирается исходя из максимума апостериорной плотности, т.е.

$$p(\hat{\theta}|y) = \max_{\theta} p(\theta|y).$$

2. *Медиана*. Оценка  $\hat{\theta}$  параметра выбирается исходя из равенства  $\Pr(\theta > \hat{\theta}|y) = \Pr(\theta < \hat{\theta}|y) = 0.5$  или

$$\int_{\hat{\theta}}^{+\infty} p(\theta|y)d\theta = \int_{-\infty}^{\hat{\theta}} p(\theta|y)d\theta = 0.5.$$

3. *Среднее*. Оценка  $\hat{\theta}$  параметра вычисляется как математическое ожидание, т.е.

$$\hat{\theta} = \mathbb{E}[\theta|y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta p(\theta|y)d\theta.$$

Наиболее важным и одновременно сложным является вопрос выбора априорного распределения параметров. Одним из факторов здесь является то, что при наличии информативных статистических данных даже “плохое” априорное распределение не повлияет существенно на апостериорное. Дру-

гим важным фактором является сложность вычислений, особенно если расчеты апостериорного распределения производятся последовательно по мере поступления статистической информации. Поэтому на выбор априорного распределения влияет его принадлежность к так называемому классу согласованных распределений, т.е. таких распределений, что априорное и апостериорное являются одним и тем же распределением, но с разными параметрами. При этом согласованность определяется не только видом априорного распределения, но и видом функции правдоподобия, т.е. тип распределения должен сохраняться при умножении априорного распределения на функцию правдоподобия с учетом нормализации. К таким распределениям относятся: гамма-распределение, если функция правдоподобия является пуассоновской; бета-распределение, если функция правдоподобия является биномиальной; распределение Дирихле, если функция правдоподобия является полиномиальной. Подробное описание целого ряда согласованных распределений можно найти в работах [69] и [173].

С другой стороны, до появления каких-либо статистических данных или наблюдений о параметрах зачастую ничего не известно. Поэтому если отбросить требование простоты вычислений, то предпочтительное или “хорошее” (подходящее) априорное распределение должно минимально влиять на вывод, т.е. на апостериорное распределение, а также учитывать отсутствие априорной информации о параметрах. Априорные распределения, моделирующие отсутствие априорной информации, называются *неинформативными*.

Постулат Байеса–Лапласа говорит о том, что, когда заранее ничего не известно о параметре  $\theta$ , априорное распределение следует принимать равномерным, т.е. все возможные исходы случайной величины  $\theta$  имеют равные вероятности. Основной проблемой использования равномерного распределения в качестве неинформативного априорного распределения является то, что равномерное распределение неинвариантно по отношению к функциям параметра. Если мы ничего не знаем о параметре  $\theta$ , то мы также ничего не знаем и, например, о функции  $1/\theta$ . Однако если  $\theta$  имеет равномерное

распределение, то  $1/\theta$  уже не имеет равномерного распределения, хотя согласно постулату Байеса–Лапласа,  $1/\theta$  должно иметь равномерное распределение. Кроме того, равномерное распределение нельзя использовать в качестве априорного, если множество значений параметра бесконечно. Следует также отметить существенную зависимость равномерного распределения от множества исходов. Уолли [132] привел следующий пример, иллюстрирующий эту зависимость. Пусть в мешке имеются шары красного цвета и каких-то других цветов. При этом неизвестно, сколько шаров красного цвета и сколько всех остальных шаров в мешке. Какова вероятность того, что первый вытасченный из мешка шар будет красный? Предполагая равномерное распределение, получаем вероятность  $1/2$ . Пусть теперь в мешке имеются шары красного цвета, зеленого цвета и каких-то других. Тогда вероятность красного шара равна  $1/3$ . Ситуация во втором случае принципиально не изменилась, так как зеленые шары можно отнести к шарам “другого цвета” применительно к первой ситуации. Однако мы получили совершенно разные вероятности красного шара. Другим наглядным примером зависимости стандартных моделей от множества исходов является задача определения вероятности рождения двух мальчиков у семейной пары, приведенная в разделе 1.2 при обосновании использования вероятностной меры.

В литературе существует достаточно большое количество подходов для выбора того или иного неинформативного априорного распределения [6, 10, 81, 173], имеющих свои достоинства и недостатки. Однако наиболее интересным является подход, полностью отличающийся от большинства традиционных. Суть этого подхода заключается в следующем. Определим не одно априорное распределение, а целый класс  $\mathcal{M}$  распределений  $\pi$ , для которого можно найти нижнюю и верхнюю вероятности события  $A$  как

$$\begin{aligned} \underline{P}(A) &= \inf\{P_\pi(A) : \pi \in \mathcal{M}\}, \\ \overline{P}(A) &= \sup\{P_\pi(A) : \pi \in \mathcal{M}\}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Если множество  $\mathcal{M}$  является выпуклым и замкнутым (см. главу 4), то оно полностью определяется нижней и верхней



функциями распределения вероятностей. Следует отметить, что класс  $\mathcal{M}$  следует рассматривать “не как класс подходящих априорных распределений, а как подходящий класс априорных распределений”. Это значит, что каждое отдельное распределение из класса не является подходящим или “хорошим” априорным распределением, так как ни одно отдельное распределение не может удовлетворительно моделировать отсутствие информации. Но весь класс в целом, определяемый верхним и нижним распределениями вероятностей, является подходящей моделью отсутствия информации. Когда априорной информации почти нет,  $\underline{P}(A)$  для этого класса должно быть близко к 0, а  $\overline{P}(A)$  близко к 1. Это означает, что априори событие  $A$  может иметь любую вероятность.

В большинстве случаев класс распределений  $\mathcal{M}$  определяется параметрически. Поэтому минимум и максимум в (5.1) обычно вычисляются по некоторым параметрам. К наиболее известным таким классам априорных распределений следует отнести обобщенную модель Дирихле [132], модель ограниченной производной [134], обобщенные модели экспоненциального семейства распределений [69].

## 5.2. Распределение Дирихле

Для описания распределения Дирихле рассмотрим стандартную полиномиальную модель. Пусть  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$  — множество возможных исходов и имеется совокупность  $N$  наблюдений, независимо выбранных из  $\Omega$  с одинаковыми вероятностями каждого исхода  $\text{Pr}\{\omega_j\} = \theta_j$  для всех  $j = 1, \dots, m$ , где  $\theta_j \geq 0$  и  $\sum_{j=1}^m \theta_j = 1$ . Вероятность того, что из  $N$  наблюдений исход  $\omega_j$  будет наблюдаться  $N_j$  раз, определяется из известной формулы полиномиального распределения с параметрами  $\theta_1, \dots, \theta_m$ . Однако параметры  $\theta_1, \dots, \theta_m$  могут быть сами случайными величинами и иметь некоторое распределение или плотность вероятности  $\pi(\theta)$ . Одним из наиболее интересных распределений параметров (вероятностей)  $\theta_1, \dots, \theta_m$  является *распределение Дирихле*, которое является согласованным с полиномиальным распределением в том смысле, что априорное и апостериорное распределения являются распре-

делениями Дирихле.

Априорное распределение Дирихле  $(s, \mathbf{t})$  для случайного вектора вероятностей  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ , где  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m)$ , имеет функцию плотности вероятности [23, 140]

$$\pi(\theta) = \Gamma(s) \left( \prod_{j=1}^m \Gamma(st_j) \right)^{-1} \cdot \prod_{j=1}^m \theta_j^{st_j-1}.$$

Здесь параметр  $t_i \in (0, 1)$  является средним значением (математическим ожиданием) вероятности  $\theta_i$ ; параметр  $s > 0$  определяет влияние априорного распределения на апостериорные вероятности; вектор  $\mathbf{t}$  принадлежит внутренней области единичного симплекса размерности  $m$ , который будем обозначать  $S(1, m)$ ;  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция, удовлетворяющая условиям  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  и  $\Gamma(1) = 1$ . Необходимо отметить, что переменными распределения Дирихле являются вероятности  $\theta_1, \dots, \theta_m$ , удовлетворяющие условию  $\theta \in S(1, m)$ . Это означает, что не только сами события считаются случайными, но и их вероятности.

**Пример 5.2.** Вернемся к примеру с надежностью фирм (см. пример 5.1). В этом примере можно выделить три события ( $m = 3$ ): фирма имеет среднюю надежность (первое событие –  $\omega_1$ ), высокую надежность (второе событие –  $\omega_2$ ), низкую надежность (третье событие –  $\omega_3$ ). Вероятности этих событий являются случайными величинами, и их математические ожидания равны  $t_1, t_2, t_3$ . При этом предположение о том, что априорные вероятности надежности фирмы равны 0.5, 0.3, 0.2 соответственно, означает, что математические ожидания вероятностей надежности фирмы для априорного распределения Дирихле равны  $t_1 = 0.5, t_2 = 0.3, t_3 = 0.2$ . Однако вероятности надежности фирмы могут быть в действительности любые с плотностью вероятности  $\pi(\theta)$ .

После получения вектора наблюдений  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$ , где  $n_j$  – число наблюдений исхода  $\omega_j$ , умножая априорную плотность на функцию правдоподобия  $L(\mathbf{n}|\theta)$ , получаем апостериорную плотность:

$$p(\theta|\mathbf{n}) \propto \pi(\theta)L(\mathbf{n}|\theta) = \prod_{j=1}^m \theta_j^{n_j+st_j-1},$$

которая может рассматриваться как плотность распределения Дирихле  $(N + s, \mathbf{t}^*)$ , где  $\mathbf{t}^* = (t_1^*, \dots, t_m^*)$ ,  $t_j^* = (n_j + st_j)/(N + s)$ . Другими словами, распределение Дирихле относится к классу согласованных распределений и при пересчете априорные параметры  $\mathbf{t}$  преобразуются в  $\mathbf{t}^*$ . Это очень важное свойство, благодаря которому распределение Дирихле получило широкое распространение в байесовском анализе.

**Пример 5.3.** Предположим, что в результате обследования 10 фирм, было установлено, что 6 фирм имеют среднюю надежность, 3 фирмы – высокую надежность и 1 фирма – низкую надежность. Тогда  $n_1 = 6$ ,  $n_2 = 3$ ,  $n_3 = 1$ ,  $N = 10$ . Пусть параметр  $s$  равен 1. Тогда апостериорные математические ожидания вероятностей надежности фирм становятся равны

$$t_1^* = \frac{6 + 1 \cdot 0.5}{10 + 1} = 0.591, \quad t_2^* = \frac{3 + 1 \cdot 0.3}{10 + 1} = 0.3,$$

$$t_3^* = \frac{1 + 1 \cdot 0.2}{10 + 1} = 0.109.$$

Таким образом, после получения новой статистической информации вероятности надежности фирм остаются случайными, но с новыми (апостериорными) математическими ожиданиями, полученными выше. При этом новая информация подтвердила априорное представление о вероятности фирм высокой надежности и изменила представление о вероятностях фирм низкой и средней надежности. С одной стороны, если принять  $s = 0$ , то апостериорные данные будут полностью определяться только имеющейся дополнительной информации в виде анализа 10 фирм. Полученные данные пересчета в этом случае не будут зависеть от выбора априорных вероятностей. С другой стороны, если параметр  $s$  принимает большие значения, то получаемая статистическая информация практически перестает влиять на апостериорные вероятности и поиск дополнительной информации теряет смысл.

Одним из важных свойств распределения Дирихле является то, что его маргинальные распределения также являются распределениями Дирихле с другими параметрами. В частности, если  $m = 2$ , то распределение Дирихле есть не что иное, как бета-распределение. Другими словами, распределение Дирихле есть обобщение бета-распределения при  $m > 2$ .

### 5.3. Обобщенная модель Дирихле

Уолли [132] предложил обобщенную модель распределений Дирихле, которая определяется как множество всех распределений Дирихле с параметрами  $s$  и  $\mathbf{t}$ . Так как вместо одного распределения в обобщенной модели используется множество всех распределений Дирихле, то произвольная оценка вероятностей состояний  $\theta_j$ , например их математическое ожидание или дисперсия, может быть получена как интервал с нижней и верхней границей так, что любая точка этого интервала соответствует одному или нескольким распределениям из множества, а нижняя (верхняя) граница интервала вычисляется минимизацией (максимизацией) соответствующей оценки по всем значениям параметров  $\mathbf{t}$  при ограничении  $\mathbf{t} \in S(1, m)$ . Для обобщенной модели параметр  $s$  определяет, как быстро верхняя и нижняя вероятности событий сходятся при накоплении статистических данных. Уолли также определил параметр  $s$  как число наблюдений, необходимое для снижения неточности (разность между верхней и нижней границами оценок вероятностей) в два раза. Малые значения параметра приводят к быстрой сходимости верхней и нижней границ вероятности к некоторому точному значению, в то время как большие значения этого параметра приводят к медленной сходимости, но более осторожному выводу. Достаточно подробное описание выбора параметра  $s$  может быть найдено в [7, 8, 9, 79, 132].

Пусть  $A$  – нетривиальное подмножество множества исходов  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ , т.е.  $A$  не является пустым и  $A \neq \Omega$ . Пусть  $n(A)$  – число появлений  $A$  в  $N$  опытах,  $n(A) = \sum_{\omega_j \in A} n_j$ . Тогда вероятность события  $A$ , обозначаемая  $P(A|\mathbf{n}, \mathbf{t}, s)$ , при условии использования распределения Дирихле может быть найдена как

$$P(A|\mathbf{n}, \mathbf{t}, s) = \frac{n(A) + st(A)}{N + s},$$

где  $t(A) = \sum_{\omega_j \in A} t_j$ .

Следует отметить, что  $P(A|\mathbf{n}, \mathbf{t}, s) = 0$ , если  $A = \emptyset$ , и  $P(A|\mathbf{n}, \mathbf{t}, s) = 1$ , если  $A = \Omega$ .

Так как вектор параметров  $\mathbf{t}$  неизвестен, рассмотрим

множество  $\mathcal{M}$  распределений вероятностей (см. границы (5.1)), определяемое множеством всех возможных векторов  $\mathbf{t} \in S(1, m)$ . Минимизируя и максимизируя вероятность  $P(A|\mathbf{n}, \mathbf{t}, s)$  по всем  $\mathbf{t} \in S(1, m)$ , получим апостериорные нижнюю и верхнюю границы вероятности события  $A$ :

$$\underline{P}(A|\mathbf{n}, s) = \frac{n(A)}{N + s}, \quad \overline{P}(A|\mathbf{n}, s) = \frac{n(A) + s}{N + s}.$$

**Пример 5.4.** Вернемся к примеру 5.1 с надежностью фирм при условии, что было обследовано 10 фирм:  $n_1 = 6$ ,  $n_2 = 3$ ,  $n_3 = 1$ ,  $N = 10$ . Если предположить, что априори ничего не было известно о фирмах, то, используя обобщенную модель Дирихле и принимая  $s = 1$ , получим вероятности событий:

$$\underline{P}(\omega_1|\mathbf{n}, 1) = 6/11, \quad \overline{P}(\omega_1|\mathbf{n}, 1) = 7/11,$$

$$\underline{P}(\omega_2|\mathbf{n}, 1) = 3/11, \quad \overline{P}(\omega_2|\mathbf{n}, 1) = 4/11,$$

$$\underline{P}(\omega_3|\mathbf{n}, 1) = 1/11, \quad \overline{P}(\omega_3|\mathbf{n}, 1) = 2/11.$$

Из результатов видно, что полученные выше значения вероятностей  $t_1^* = 0.591$ ,  $t_2^* = 0.3$ ,  $t_3^* = 0.109$ , использующие априорное распределение вероятностей  $t_1 = 0.5$ ,  $t_2 = 0.3$ ,  $t_3 = 0.2$ , попадают в границы  $\underline{P}(\omega_i|\mathbf{n}, 1)$  и  $\overline{P}(\omega_i|\mathbf{n}, 1)$ , которые не учитывали эти априорные вероятности.

Если принять  $s = 2$ , то

$$\underline{P}(\omega_1|\mathbf{n}, 2) = 6/12, \quad \overline{P}(\omega_1|\mathbf{n}, 2) = 8/12,$$

$$\underline{P}(\omega_2|\mathbf{n}, 2) = 3/12, \quad \overline{P}(\omega_2|\mathbf{n}, 2) = 5/12,$$

$$\underline{P}(\omega_3|\mathbf{n}, 2) = 1/12, \quad \overline{P}(\omega_3|\mathbf{n}, 2) = 3/12.$$

Результаты показывают, что интервалы вероятностей стали шире. С одной стороны, это дает повод говорить, что полученные оценки являются более надежными по сравнению с оценками, полученными при  $s = 1$ . С другой стороны, увеличивается степень неточности результатов и, следовательно, снижается их информативность.

Заметим, что перед получением каких-либо наблюдений  $n(A) = N = 0$  и, следовательно,  $\underline{P}(A|\mathbf{n}, s) = 0$  и  $\overline{P}(A|\mathbf{n}, s) = 1$  для всех нетривиальных событий  $A$ . Другими словами, если ничего не известно о поведении случайной величины, то вероятности событий могут быть любыми в пределах от 0 до

1. Это очень важное свойство, так как, используя обобщенную модель Дирихле, нет необходимости выбирать какое-либо определенное априорное распределение для  $\theta$ . В противоположность этому, объективный байесовский подход [10] требует для моделирования полного отсутствия сведений или статистики о вероятностях  $\theta$  для использования одного определенного априорного распределения. Таким образом, обобщенная модель Дирихле может рассматриваться как “подходящий” класс априорных распределений, а не как класс “подходящих” априорных распределений (см. раздел 5.1).

Другим важным свойством обобщенной модели Дирихле является ее инвариантность по отношению к множеству возможных исходов, т.е. статистический вывод не зависит от размера и содержания пространства элементарных событий. Это связано с тем, что в отличие от объективного байесовского анализа, когда  $s = 0$ , обобщенная модель Дирихле не предусматривает определения какого-либо конкретного априорного распределения, значения которого зависят от количества возможных исходов (например, при использовании равномерного распределения). Более того, процедура статистического вывода не зависит от того, насколько полученные статистические данные точны, т.е. наблюдения могут быть интервальными, вложенными, перекрывающимися или вообще отсутствующими для некоторых возможных исходов.

Заметим, что если  $s = 0$ , то  $\underline{P}(A|\mathbf{n}, s) = \overline{P}(A|\mathbf{n}, s)$ , т.е. верхняя и нижняя границы вероятности совпадают. Казалось бы, чтобы уменьшить неточность, следует выбирать  $s = 0$ . Однако это приводит к слишком рискованным выводам. Предположим, что имеется монета  $\Omega = \{\text{орел, решка}\}$ , которую подбросили 5 раз ( $N = 5$ ) так, что 3 раза выпал орел ( $n_1 = 3$ ,  $n_2 = N - n_1 = 2$ ). Не зная, что вероятность орла равна 0.5, можно сделать вывод из результатов испытаний, что эта вероятность равна  $3/5 = 0.6$ , что, в свою очередь, является ошибкой. В то же время, если принять  $s = 1$ , то из приведенных выражений получим  $\underline{P}(\text{орел}|\mathbf{n}, 1) = 3/6$ ,  $\overline{P}(\text{орел}|\mathbf{n}, 1) = 4/6$ , т.е. вероятность выпадения орла находится в интервале  $[1/2, 2/3]$ . Из этих результатов видно, что, “размывая” интервал искомой вероятности, мы принимаем более осторожное и, как видно из

примера, более правильное решение о вероятности события.

Следует также отметить, что с увеличением числа испытаний  $N$  влияние параметра  $s$  уменьшается и при большом количестве опытов (наблюдений) параметр вообще перестает влиять на итоговые результаты.

## 5.4. Робастная модель засорения

Одним из известных подходов для учета неоднозначности априорного распределения в байесовских методах оценивания является использование устойчивых, или робастных, методов оценивания [181]. Существует большое количество робастных моделей, но наиболее популярные из них – модели засорения. Основная идея этих моделей заключается в том, что для защиты от ошибки выбора определенного априорного распределения  $P$ , предполагаемого как “истинное” распределение, формируется некоторая окрестность (множество распределений)  $\mathcal{M}(\varepsilon)$ , которая содержит все распределения достаточно близкие в определенном смысле<sup>1</sup> к распределению  $P$ . Здесь  $\varepsilon$  – мера засорения, которая понимается как доля “засоряющих” распределений. Обычно окрестности являются вложенными, т.е.  $\mathcal{M}(\varepsilon_1) \subseteq \mathcal{M}(\varepsilon_2)$ , если  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ . Одной из робастных моделей данного типа является модель  $\varepsilon$ -засорения, для которой множество  $\mathcal{M}(\varepsilon)$  образуется распределениями вида  $(1 - \varepsilon)P + \varepsilon Q$ , где  $Q$  – произвольное распределение. Другими словами, множество  $\mathcal{M}(\varepsilon)$  определяется всеми возможными распределениями.

Найдем нижнюю вероятность для нетривиального события  $A \subset \Omega$ :

$$\begin{aligned} \underline{P}(A) &= \min_Q \{(1 - \varepsilon)P(A) + \varepsilon Q(A)\} = \\ &= (1 - \varepsilon)P(A) + \varepsilon \min_Q Q(A). \end{aligned}$$

Очевидно, что из множества всех возможных распределений

---

<sup>1</sup>Здесь мера близости двух распределений вероятностей, определяемая, в свою очередь, мерой расстояния между распределениями, явно не оговаривается, так как она зависит от конкретной модели засорения.

$Q$  можно найти такое, что  $Q(A) = 0$ , если  $A \neq \Omega$ . Следовательно, нижняя вероятность имеет вид

$$\underline{P}(A) = (1 - \varepsilon)P(A).$$

Найдем теперь верхнюю вероятность для нетривиального события  $A \subset \Omega$ :

$$\begin{aligned} \overline{P}(A) &= \max_Q \{(1 - \varepsilon)P(A) + \varepsilon Q(A)\} = \\ &= (1 - \varepsilon)P(A) + \varepsilon \max_Q Q(A). \end{aligned}$$

Очевидно, что из множества всех возможных распределений  $Q$  можно найти такое, что  $Q(A) = 1$ , если  $A \neq \emptyset$ . Следовательно, верхняя вероятность имеет вид:

$$\overline{P}(A) = (1 - \varepsilon)P(A) + \varepsilon.$$

Важным свойством модели  $\varepsilon$ -засорения является то, что математическое ожидание любой функции  $f(X)$  случайной величины  $X$  определяется как

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f(X) &= (1 - \varepsilon) \sum_i f(x_i)P_i + \varepsilon \sum_i f(x_i)Q_i = \\ &= (1 - \varepsilon)\mathbb{E}_P f(X) + \varepsilon \mathbb{E}_Q f(X). \end{aligned}$$

Тогда можно получить аналогичным образом выражения для нижней и верхней границ математического ожидания функции  $f(X)$ , минимизируя и максимизируя по всем распределениям  $Q$ :

$$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} f(X) = (1 - \varepsilon)\mathbb{E}_P f(X) + \varepsilon \inf_x f(x),$$

$$\overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} f(X) = (1 - \varepsilon)\mathbb{E}_P f(X) + \varepsilon \sup_x f(x).$$

Интересно отметить также связь между обобщенной моделью Дирихле и моделью  $\varepsilon$ -засорения. Пусть  $P(A)$  оценивается как  $n(A)/N$ , где  $n(A)$  – число появлений  $A$  в  $N$  опытах. В соответствии с моделью  $\varepsilon$ -засорения, мы получаем:

$$\underline{P}(A) = (1 - \varepsilon)n(A)/N, \quad \overline{P}(A) = (1 - \varepsilon)n(A)/N + \varepsilon.$$



Если взять значение  $\varepsilon$  в виде  $\varepsilon = s/(N + s)$ , то мы получим вероятности

$$\underline{P}(A) = n(A)/(N + s), \quad \overline{P}(A) = (n(A) + s)/(N + s),$$

которые полностью совпадают с вероятностями события  $A$ , полученными для обобщенной модели Дирихле. Этот факт говорит о том, что обобщенная модель Дирихле может рассматриваться как один из видов робастных моделей.

Модель  $\varepsilon$ -засорения определяет непараметрический класс априорных распределений.

## 5.5. Расширенные функции доверия и правдоподобия

Предположим, что имеется  $N$  наблюдений (свидетельств)  $A_i \subseteq \Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , и  $c_i$  – число наблюдаемых множеств  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Как было уже показано, функции доверия и правдоподобия могут быть получены путем использования множества полиномиальных моделей или множества урновых моделей (см. раздел 2.2). Однако в качестве оценки вероятности  $\theta_i$  выбора шара из  $i$ -й урны было принято отношение количества выбранных из  $i$ -й урны шаров  $n_i^{(k)}$  к общему количеству выбираемых шаров  $N$ , где  $k$  – номер возможной реализации выбора шаров из  $i$ -й урны. Рассмотренная модель, так же как и стандартный метод вычисления базовых вероятностей в теории свидетельств, вполне оправданна, если значение  $N$  достаточно велико, т.е. имеется большое количество интервальных наблюдений или свидетельств. Однако если  $N$  мало, то результаты расчетов могут оказаться слишком ненадежными.

Для того чтобы получить более “осторожные” границы для функций доверия и правдоподобия, предположим, что вероятности вытащить шар из определенной урны имеют распределение Дирихле. Тогда с учетом того что интервальные наблюдения приводят к множеству из  $M$  полиномиальных моделей, нижняя  $\underline{P}(A|\mathbf{c}, s)$  и верхняя  $\overline{P}(A|\mathbf{c}, s)$  вероятности события  $A$ , элементы которого имеют индексы из множества  $J$ ,

вычисляются следующим образом:

$$\underline{P}(A|\mathbf{c}, s) = \min_{k=1, \dots, M} \inf_{\mathbf{t} \in S(1, m)} \frac{n^{(k)}(A) + st(A)}{N + s},$$

$$\overline{P}(A|\mathbf{c}, s) = \max_{k=1, \dots, M} \sup_{\mathbf{t} \in S(1, m)} \frac{n^{(k)}(A) + st(A)}{N + s},$$

где

$$t(A) = \sum_{j \in J} t_j, \quad n^{(k)}(A) = \sum_{j \in J} n_j^{(k)}.$$

Теперь необходимо найти  $n^{(k)}(A)$  и  $t(A)$ . Нижняя  $\underline{P}(A|\mathbf{c}, s)$  и верхняя  $\overline{P}(A|\mathbf{c}, s)$  вероятности могут быть переписаны как

$$\underline{P}(A|\mathbf{c}, s) = \frac{\min_{k=1, \dots, M} n^{(k)}(A) + s \cdot \inf_{\mathbf{t} \in S(1, m)} t(A)}{N + s}, \quad (5.2)$$

$$\overline{P}(A|\mathbf{c}, s) = \frac{\max_{k=1, \dots, M} n^{(k)}(A) + s \cdot \sup_{\mathbf{t} \in S(1, m)} t(A)}{N + s}. \quad (5.3)$$

Заметим, что минимум  $t(A)$  по всем  $\mathbf{t} \in S(1, m)$  достигается при  $t(A) = 0$ , а максимум  $t(A)$  по всем  $\mathbf{t} \in S(1, m)$  достигается при  $t(A) = 1$ , за исключением случаев, когда  $A = \Omega$  или  $A = \emptyset$ . Если  $A = \Omega$ , то минимум и максимум достигаются при  $t(A) = 1$ . Если  $A = \emptyset$ , то минимум и максимум достигаются при  $t(A) = 0$ .

Для вычисления минимума  $n^{(k)}(A)$ , обозначенного  $\Phi_1(A)$ , рассмотрим только те множества  $A_i$ , для которых шары не могут быть вытащены из урн, не принадлежащих  $A$ . Эти множества являются подмножествами  $A$ , т.е.  $A_i \subseteq A$ . Поэтому можно записать

$$\Phi_1(A) = \min_{k=1, \dots, M} n^{(k)}(A) = \sum_{i: A_i \subseteq A} c_i.$$

Для вычисления максимума  $n^{(k)}(A)$ , обозначенного  $\Phi_2(A)$ , рассмотрим только те множества  $A_i$ , для которых шары могут быть вытащены из урн, принадлежащих  $A$ . Все эти множества

имеют по крайней мере одну общую с  $A$  урну, т.е.  $A_i \cap A \neq \emptyset$ . Поэтому можно записать

$$\Phi_2(A) = \max_{k=1, \dots, M} n^{(k)}(A) = N - \sum_{i: A_i \cap A = \emptyset} c_i = \sum_{i: A_i \cap A \neq \emptyset} c_i.$$

Из (2.1) следует связь между функциями  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и базовыми вероятностями  $m(A_i)$  фокальных элементов:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_1(A)}{N} &= \sum_{i: A_i \subseteq A} \frac{c_i}{N} = \sum_{A_i: A_i \subseteq A} m(A_i), \\ \frac{\Phi_2(A)}{N} &= \sum_{i: A_i \cap A \neq \emptyset} \frac{c_i}{N} = \sum_{A_i: A_i \cap A \neq \emptyset} m(A_i). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что  $\Phi_1(A)/N$  и  $\Phi_2(A)/N$  есть функция доверия  $\text{Bel}(A)$  и функция правдоподобия  $\text{Pl}(A)$  множества  $A \subseteq \Omega$  соответственно. Тогда

$$\underline{P}(A|\mathbf{c}, s) = \frac{N \cdot \text{Bel}(A)}{N + s}, \quad \bar{P}(A|\mathbf{c}, s) = \frac{N \cdot \text{Pl}(A) + s}{N + s}. \quad (5.4)$$

Из приведенных выражений очевидно, что  $\underline{P}(A|\mathbf{c}, s) \leq \text{Bel}(A)$  и  $\bar{P}(A|\mathbf{c}, s) \geq \text{Pl}(A)$ , т.е.  $\underline{P}(A|\mathbf{c}, s)$  и  $\bar{P}(A|\mathbf{c}, s)$  являются параметрическими (с параметром  $s$ ) расширениями функций доверия и правдоподобия события  $A$ , учитывающими тот факт, что число наблюдений  $N$  является ограниченным.

Перепишем полученные равенства (5.4) следующим образом:

$$\underline{P}(A|\mathbf{c}, s) = \varkappa \text{Bel}(A), \quad \bar{P}(A|\mathbf{c}, s) = 1 - \varkappa(1 - \text{Pl}(A)),$$

где  $\varkappa = (1 + s/N)^{-1}$  и  $\varkappa \in [0, 1]$ .

Это представление дает возможность рассматривать вероятности  $\underline{P}(A|\mathbf{c}, s)$  и  $\bar{P}(A|\mathbf{c}, s)$  как некоторую коррекцию или дисконтирование функций доверия и правдоподобия.

**Пример 5.5.** Вернемся к примеру 2.1 о кандидатах на некоторую должность. Примем  $s = 1$ . Тогда  $\varkappa = (1 + 1/10)^{-1} = 0.909$ , и новые границы для вероятности первого кандидата ( $A = \{1\}$ ) равны

$$\underline{P}(\{1\}|\mathbf{c}, 1) = 0.455, \quad \bar{P}(\{1\}|\mathbf{c}, 1) = 0.864.$$

Нижняя и верхняя границы для вероятности второго кандидата ( $A = \{2\}$ ) равны

$$\underline{P}(\{2|\mathbf{c}, 1) = 0, \quad \overline{P}(\{2|\mathbf{c}, 1) = m(A_2) = 0.636.$$

Нижняя и верхняя границы для вероятности третьего кандидата ( $A = \{3\}$ ) равны

$$\underline{P}(\{2|\mathbf{c}, 1) = 0, \quad \overline{P}(\{2|\mathbf{c}, 1) = m(A_3) = 0.682.$$

Сравнение этих результатов с функциями доверия и правдоподобия, полученными в примере 2.1, показывает, что границы вероятностей стали шире и менее информативными, но более “осторожными”.

## 5.6. Расширенные функции доверия и случайные множества

Объясним расширение функций доверия и правдоподобия в терминах многозначных отображений. Предположим, что множество наблюдений  $\Psi$  состоит из  $M = 2^m$  точек  $\psi_1, \dots, \psi_m$ , и каждый наблюдаемый интервал  $A_j \subseteq \Omega$  соответствует одной точке  $\psi_j$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Предположим также, что вероятности  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_M)$ , где  $\theta_j = P(\psi_j)$ , имеют распределение Дирихле  $(s, \mathbf{t})$ . Тогда нижняя вероятность любого события  $A$  может быть записана как

$$\underline{P}(A|\mathbf{c}, s) = \frac{n(X_*) + st(X_*)}{N + s},$$

где  $t(X_*) = \sum_{\psi_j \in X_*} t_j$ ,  $n(X_*) = \sum_{\psi_j \in X_*} c_j$ .

Используя обобщенную модель Дирихле, мы получим для любого  $A \subset \Omega$

$$\begin{aligned} \underline{P}(A|\mathbf{c}, s) &= \min_{\mathbf{t} \in S(1, M)} \frac{n(X_*) + st(X_*)}{N + s} = \\ &= (N + s)^{-1} \sum_{\psi_j \in X_*} c_j = \\ &= N \cdot \text{Bel}(A) / (N + s) = \varkappa \cdot \text{Bel}(A). \end{aligned}$$

Если  $A = \Omega$ , то  $\underline{P}(A|\mathbf{c}, s) = 1$ .

Верхняя вероятность события  $A$  вычисляется аналогичным образом:

$$\begin{aligned}\bar{P}(A|\mathbf{c}, s) &= \max_{\mathbf{t} \in S(1, M)} \frac{n(X^*) + st(X^*)}{N + s} = \\ &= \left( \sum_{\psi_j \in X^*} c_j + s \right) / (N + s) = \\ &= (N \cdot \text{Pl}(A) + s) / (N + s) = \\ &= 1 - \varkappa(1 - \text{Pl}(A)).\end{aligned}$$

Полученные вероятности можно рассмотреть также в рамках робастных моделей  $\varepsilon$ -засорения [181]. Введем обозначение  $\varepsilon = s/(N + s) = 1 - \varkappa$ . Тогда

$$\begin{aligned}\underline{P}(A|\mathbf{c}, \varepsilon) &= \min_Q \sum_{\psi_i \in X_*} \{(1 - \varepsilon)P(\psi_i) + \varepsilon Q(\psi_i)\} = \\ &= \sum_{\psi_j \in X_*} (1 - \varepsilon)P(\psi_j) = \sum_{\psi_j \in X_*} (1 - \varepsilon)c_j/N = \\ &= (1 - \varepsilon)\text{Bel}(A),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{P}(A|\mathbf{c}, s) &= \max_Q \sum_{\psi_i \in X^*} \{(1 - \varepsilon)P(\psi_i) + \varepsilon Q(\psi_i)\} = \\ &= \varepsilon + \sum_{\psi_i \in X^*} (1 - \varepsilon)P(\psi_i) = \varepsilon + \sum_{\psi_i \in X^*} (1 - \varepsilon)c_i/N = \\ &= (1 - \varepsilon)\text{Pl}(A) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Получены те же границы для функций доверия и правдоподобия. При этом мера засорения приобретает определенный смысл и метод вычисления. Она зависит от числа наблюдений  $N$  и значения параметра  $s$ , т.е.  $\varepsilon = 1 - \varkappa = s/(N + s)$ . В частности, при  $s = 0$  мера засорения также равна 0, что говорит о том, что никакого засорения нет и имеется точное распределение вероятностей  $P$ . Это явно показывает, насколько рискованными становятся все заключения, если считать, что статистический эксперимент идеален и засорения отсутствуют.

## 5.7. Свойства расширенных функций доверия и правдоподобия

Рассмотрим основные свойства расширенных функций доверия и правдоподобия [101, 104, 108].

- 1) Для любого значения  $s \geq 0$  выполняются следующие неравенства:

$$\underline{P}(A|\mathbf{c}, s) \leq \text{Bel}(A), \quad \overline{P}(A|\mathbf{c}, s) \geq \text{Pl}(A).$$

- 2) Границы вероятностей  $\underline{P}(A|\mathbf{c}, s)$  и  $\overline{P}(A|\mathbf{c}, s)$  являются также функциями доверия и правдоподобия с новыми базовыми вероятностями  $m^*(A_i) = c_i/(N + s)$  для каждого события  $A_i \subseteq \Omega$  и дополнительной базовой вероятностью  $m^*(\Omega) = s/(N + s)$ , т.е.  $\underline{P}(A|\mathbf{c}, s)$  и  $\overline{P}(A|\mathbf{c}, s)$  могут быть получены как стандартные (нерасширенные) функции доверия и правдоподобия при условии, что имеется  $s$  дополнительных наблюдений  $A^* = \Omega$ . Если обозначить  $m(A_i) = c_i/N$ , то

$$m^*(A_i) = m(A_i)N/(N + s) = \varkappa \cdot m(A_i)$$

и

$$\underline{P}(A|\mathbf{c}, s) = \sum_{A_i: A_i \subseteq A} m^*(A_i),$$

$$\overline{P}(A|\mathbf{c}, s) = m^*(\Omega) + \sum_{A_i: A_i \cap A \neq \emptyset} m^*(A_i).$$

Это свойство следует также из интерпретации параметра  $s$  обобщенной модели Дирихле как числа *скрытых* наблюдений [132]. В то же время величина  $1 - \varkappa$  может рассматриваться как коэффициент дисконтирования [75], используемый в правиле комбинирования свидетельств и характеризующий надежность источника данных. Отсюда следует, что применение обобщенной модели Дирихле приводит к правилу дисконтирования, но со строго определенным значением коэффициента дисконтирования, зависящем от числа наблюдений  $N$  и от параметра  $s$ .

3) Из предыдущего свойства следует, что

$$\overline{P}(A|\mathbf{c}, s) = 1 - \underline{P}(A^c|\mathbf{c}, s), \quad \underline{P}(A|\mathbf{c}, s) = 1 - \overline{P}(A^c|\mathbf{c}, s),$$

$$\underline{P}(A|\mathbf{c}, s) + \underline{P}(B|\mathbf{c}, s) \leq \underline{P}(A \cup B|\mathbf{c}, s),$$

где  $A, B \subseteq \Omega$  и  $A^c$  – дополнение множества  $A$ .

4) Если нет никакой информации об элементах  $\Omega$ , т.е. не было никаких наблюдений, то  $c_i = N = 0$  и для любого  $s \geq 0$  имеют место равенства

$$\underline{P}(A|\mathbf{c}, s) = \text{Bel}(A) = 0, \quad \overline{P}(A|\mathbf{c}, s) = \text{Pl}(A) = 1.$$

5) Если  $N \rightarrow \infty$ , т.е. базовые вероятности совпадают с вероятностями в классическом (частотном) смысле, то для любого  $s \geq 0$  имеют место равенства

$$\underline{P}(A|\mathbf{c}, s) = \text{Bel}(A), \quad \text{Pl}(A) = \overline{P}(A|\mathbf{c}, s).$$

6) Если  $s_1 \leq s_2$ , то выполняется условие

$$[\underline{P}(A|\mathbf{c}, s_1), \overline{P}(A|\mathbf{c}, s_1)] \subseteq [\underline{P}(A|\mathbf{c}, s_2), \overline{P}(A|\mathbf{c}, s_2)].$$

Рассмотрим некоторые частные случаи, иллюстрирующие достоинства расширенных функций доверия и правдоподобия.

Предположим, что имеется одно свидетельство  $A \subset \Omega$  ( $\mathbf{c} = (1)$ ). Тогда  $m(A) = 1$  и, в соответствии с определением функций доверия и правдоподобия, можно утверждать, что  $\text{Bel}(A) = \text{Pl}(A) = 1$ . Отсюда следует, что мы полностью доверяем с вероятностью 1 только одному свидетельству. Такое заключение слишком рискованно, что является существенным недостатком функций доверия и правдоподобия. Однако этот недостаток можно обойти, используя обобщенную модель Дирихле или расширенные функции доверия и правдоподобия. Действительно, если  $s = 1$ , то

$$\underline{P}(A|(1), 1) = 1/(1 + s) = 0.5, \quad \overline{P}(A|(1), 1) = 1.$$

Следует отметить, что при наличии  $r$  одинаковых свидетельств ( $\mathbf{c} = (r)$ ) функции доверия и правдоподобия также равны 1, т.е.  $\text{Bel}(A) = \text{Pl}(A) = 1$ . Это значит, что доверие и правдоподобие не зависят от значения  $r$ , что также можно рассматривать как противоречие и недостаток функций доверия и правдоподобия. Для расширенных функций при  $s > 0$  получаем:

$$\underline{P}(A|(r), s) = r/(r + s), \quad \overline{P}(A|(r), s) = 1.$$

Чем больше данных имеется в распоряжении, тем выше нижняя граница вероятности, и при  $r \rightarrow \infty$  нижняя и верхняя границы совпадают и равны 1.

Предположим, что имеется два конфликтных свидетельства  $A_1$  и  $A_2$  ( $\mathbf{c} = (1, 1)$ ), т.е.  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ . Тогда

$$\text{Bel}(A_i) = \text{Pl}(A_i) = 0.5, \quad i = 1, 2.$$

Например, пусть  $\Omega = [0, 1]$ ,  $A_1 = [0, 0.999]$ ,  $A_2 = [0.9991, 1]$ . Если  $A_1$  и  $A_2$  – интервальные (неточные) свидетельства, то одинаковая степень доверия к ним, выраженная условием  $\text{Bel}(A_i) = \text{Pl}(A_i) = 0.5$ , вызывает сомнения. Если эти интервалы даны экспертами, то можно сказать, что оценка первого эксперта слишком осторожна, а оценка второго эксперта слишком рискованна [30]. В этом случае заключение  $\text{Bel}(A_i) = \text{Pl}(A_i) = 0.5$  может быть неправдоподобным. В то же время полученные границы можно скорректировать, используя расширенные функции доверия и правдоподобия, т.е.

$$\underline{P}(A_i|(1, 1), s) = 1/(2 + s), \quad \overline{P}(A_i|(1, 1), s) = (1 + s)/(2 + s).$$

Если принять  $s = 1$ , то получаем более “осторожные” границы

$$\underline{P}(A_i|(1, 1), 1) = 1/3, \quad \overline{P}(A_i|(1, 1), 1) = 2/3.$$

Рассмотренные примеры показывают преимущество расширенных функций доверия и правдоподобия по сравнению с обычными функциями доверия и правдоподобия.



## 5.8. Расширенное распределение возможностей

Если фокальные элементы  $A_1, \dots, A_n$  могут быть упорядочены так, что  $A_i \subseteq A_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , т.е. они вложены друг в друга, то эти фокальные элементы могут рассматриваться как  $\alpha$ -уровневые срезы нечеткого множества  $F$ , функция распределения возможностей которого определяется из соотношения<sup>2</sup>

$$\pi_F(\omega) = \text{Pl}(\{\omega\}) = \sum_{A_i: \omega \in A_i} m(A_i) = \sum_{A_i: \omega \in A_i} \frac{c_i}{N}.$$

В этом случае функция правдоподобия совпадает с функцией распределения возможности, а функция доверия – с мерой необходимости в рамках теории возможностей [155]. В рамках такой интерпретации нечеткое множество моделирует неопределенность, а не нечеткость [82].

Так как функция распределения возможностей определяется через функцию правдоподобия, то можно параметрически расширить функцию распределения возможностей, учитывая, что число наблюдений или оценок  $N$  ограничено. Используя (5.4), получаем:

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_F(\omega|s) &= \bar{P}(\{\omega\}|\mathbf{c}, s) = \frac{N \cdot \text{Pl}(\{\omega\}) + s}{N + s} = \\ &= \frac{N \cdot \pi_F(\omega) + s}{N + s}. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\bar{\pi}_F(\omega|s) \geq \pi_F(\omega)$  для всех  $\omega$  и для любого  $s \geq 0$ . Отметим, что расширенная функция распределения возможностей является в свою очередь также функцией распределения возможностей. Более того, существует взаимно однозначное соответствие между исходной и расширенной функциями распределения возможностей.

Расширенную функцию распределения возможностей можно также трактовать в терминах робастных моделей  $\varepsilon$ -засорения. Так как  $\varepsilon = s/(N + s)$ , то справедливо следующее

---

<sup>2</sup>Более подробные пояснения приводимых соотношений можно найти в главе 3.

соотношение:

$$\bar{\pi}_F(\omega|s) = (1 - \varepsilon)\pi_F(\omega) + \varepsilon.$$

Это означает, что расширенная функция распределения возможностей есть результат “засорения” распределения возможностей.

**Пример 5.6.** Предположим, что имеется 10 возможных мест для продажи некоторого товара ( $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_{10}\}$ ). 100 экспертов определяют наиболее предпочтительные места с точки зрения эффективности продаж: 26 экспертов ( $c_4 = 26$ ) предлагают места из множества  $A_4 = \{\omega_4, \dots, \omega_{10}\}$ , 22 эксперта ( $c_3 = 22$ ) – места из множества  $A_3 = \{\omega_5, \dots, \omega_9\}$ , 27 экспертов ( $c_2 = 27$ ) – места из множества  $A_2 = \{\omega_6, \dots, \omega_8\}$ , 25 экспертов ( $c_1 = 25$ ) – место  $\omega_7$  ( $A_1 = \{\omega_7\}$ ). Функция распределения возможностей мест для продажи показана на рис. 5.1 (график 1).

Теперь предположим, что оценки дают только 5 экспертов: 2 эксперта ( $c_4 = 2$ ) предлагают места из множества  $A_4$ , 1 эксперт ( $c_2 = 1$ ) – места из множества  $A_2$ , 2 эксперта ( $c_1 = 2$ ) – места из множества  $A_1$ . Функция распределения возможностей мест для продажи  $\pi_F(\omega)$ , полученная на основе функции правдоподобия ( $s = 0$ ), показана на рис. 5.1 (график 2). Из рисунка видно, что это распределение существенно отличается от распределения, полученного при обработке 100 экспертных оценок. Распределения возможностей 3 и 4 являются коррекцией распределения  $\pi_F(\omega)$  при  $s = 1$  и  $s = 4$  соответственно, учитывающей факт, что значение  $N$  мало. Заметим, что  $\bar{\pi}_F(\omega|1) \not\geq \pi_F^*(\omega)$  и  $\bar{\pi}_F(\omega|4) \geq \pi_F^*(\omega)$  для всех  $\omega \in \Omega$ . Отсюда следует, что значение 1 для параметра  $s$  недостаточно для того, чтобы принимать “осторожное” решение о местах для продажи.

## 5.9. Модификация правил комбинирования свидетельств

Правила комбинирования уже рассматривались при описании теории свидетельств (см. главу 2). Здесь мы рассматриваем правила, которые могут быть получены на основе расширенных функций доверия и правдоподобия.

Предположим, что имеется два источника данных. Первый источник предоставляет  $N_1$  наблюдений (свидетельств)

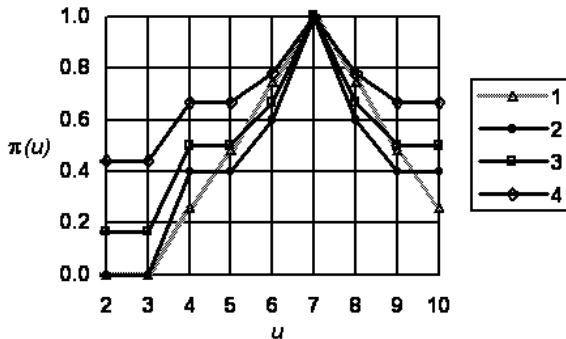


Рис. 5.1. Функции распределения возможностей при различных значениях  $s$  и  $N$

$A_i^{(1)} \subseteq \Omega$ ,  $i = 1, \dots, n_1$ , и  $c_i^{(1)}$  – число наблюдаемых множеств  $A_i^{(1)}$ ,  $i = 1, \dots, n_1$ . Второй источник предоставляет  $N_2$  наблюдений (свидетельств)  $A_i^{(2)} \subseteq \Omega$ ,  $i = 1, \dots, n_2$ , и  $c_i^{(2)}$  – число наблюдаемых множеств  $A_i^{(2)}$ ,  $i = 1, \dots, n_2$ .

### 5.9.1. Линейная комбинация свидетельств

Одним из основных свойств распределения Дирихле является тот факт, что априорное распределение вероятностей с параметрами  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m)$  при использовании байесовского подхода пересчитывается в апостериорное распределение с параметрами  $\mathbf{t}^* = (t_1^*, \dots, t_m^*)$ , где  $t_i^* = (n_i + st_i)/(N + s)$ . Отсюда следует, что каждый источник может рассматриваться как набор дополнительных свидетельств в рамках одной и той же модели. Если существуют два источника свидетельств, то комбинированная нижняя вероятность  $\underline{P}(A | (\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}), s)$  события  $A$  вычисляется как

$$\underline{P}(A | (\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}), s) = \frac{\sum_{i: A_i^{(1)} \subseteq A} c_i^{(1)} + \sum_{i: A_i^{(2)} \subseteq A} c_i^{(2)}}{N_1 + N_2 + s}.$$

Так как

$$\sum_{i: A_i^{(1)} \subseteq A} c_i^{(1)} = N_1 \text{Bel}_1(A), \quad \sum_{i: A_i^{(2)} \subseteq A} c_i^{(2)} = N_2 \text{Bel}_2(A),$$

то

$$\underline{P}(A|(\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}), s) = \frac{N_1 \text{Bel}_1(A) + N_2 \text{Bel}_2(A)}{N_1 + N_2 + s}. \quad (5.5)$$

С другой стороны, нижние вероятности события  $A$ , полученные отдельно для каждого источника, имеют следующий вид:

$$\underline{P}_i(A|\mathbf{c}^{(i)}, s_i) = N_i \cdot \text{Bel}_i(A) / (N_i + s_i), \quad i = 1, 2.$$

Отсюда

$$\text{Bel}_i(A) = \frac{N_i + s_i}{N_i} \cdot \underline{P}_i(A|\mathbf{c}^{(i)}, s_i), \quad i = 1, 2.$$

Здесь также предполагается, что параметры  $s_1$  и  $s_2$  распределения Дирихле могут быть различными для каждого источника. Подставляя полученные равенства в (5.5), имеем:

$$\begin{aligned} \underline{P}(A|(\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}), s) &= \frac{N_1 + s_1}{N_1 + N_2 + s} \cdot \underline{P}_1(A|\mathbf{c}^{(1)}, s_1) + \\ &+ \frac{N_2 + s_2}{N_1 + N_2 + s} \cdot \underline{P}_2(A|\mathbf{c}^{(2)}, s_2) \end{aligned} \quad (5.6)$$

и, если  $A = \Omega$ , то  $\underline{P}(A|(\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}), s) = 1$ .

Заметим, что одна из интерпретаций параметра  $s$  – число скрытых наблюдений или свидетельств. Тогда, имея  $s_1$  скрытых свидетельств из первого источника и  $s_2$  скрытых свидетельств из второго источника, можно ожидать, что общее число скрытых свидетельств равно  $s = s_1 + s_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} \underline{P}(A|(\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}), s) &= \frac{N_1 + s_1}{N_1 + N_2 + s_1 + s_2} \underline{P}_1(A|\mathbf{c}^{(1)}, s_1) + \\ &+ \frac{N_2 + s_2}{N_1 + N_2 + s_1 + s_2} \underline{P}_2(A|\mathbf{c}^{(2)}, s_2). \end{aligned}$$

Обозначим  $\gamma = (N_1 + s_1)/(N_1 + N_2 + s_1 + s_2)$ . Тогда

$$\underline{P}(A|(\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}), s) = \gamma \underline{P}_1(A|\mathbf{c}^{(1)}, s_1) + (1 - \gamma) \underline{P}_2(A|\mathbf{c}^{(2)}, s_2).$$

Необходимо отметить, что выполняется равенство

$$\underline{P}(A|(\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}), s) = \underline{P}_1(A|\mathbf{c}^{(1)}, s_1) = \underline{P}_2(A|\mathbf{c}^{(2)}, s_2),$$

если  $\underline{P}_1(A|\mathbf{c}^{(1)}, s_1) = \underline{P}_2(A|\mathbf{c}^{(2)}, s_2)$ . Следовательно, линейная комбинация свидетельств является идемпотентной.

Аналогичное правило комбинирования можно записать для верхней вероятности:

$$\overline{P}(A|(\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}), s) = \gamma \overline{P}_1(A|\mathbf{c}^{(1)}, s_1) + (1 - \gamma) \overline{P}_2(A|\mathbf{c}^{(2)}, s_2).$$

Параметр  $\gamma$  можно интерпретировать как относительную надежность первого источника. Кроме того,  $\gamma$  возрастает с возрастанием  $N_1$ . Действительно, большее число наблюдений или свидетельств предполагает, что соответствующий источник является более надежным<sup>3</sup>. Если мы имеем, например, 1000 наблюдений, полученных из одного источника, то наше доверие к ним выше, чем к 10 наблюдениям из другого источника.

Следует отметить, что  $\underline{P}(A|(\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}), s)$  и  $\overline{P}(A|(\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}), s)$  являются также функциями доверия и правдоподобия с базовыми вероятностями:

$$\begin{aligned} m_{12}^*(A_i^{(1)}) &= \gamma c_i^{(1)} / (N_1 + s_1), \\ m_{12}^*(A_j^{(2)}) &= (1 - \gamma) m_2^*(A_j^{(2)}) = (1 - \gamma) c_j^{(2)} / (N_2 + s_2), \\ m_{12}^*(\Omega) &= \gamma s_1 / (N_1 + s_1) + (1 - \gamma) s_2 / (N_2 + s_2). \end{aligned}$$

Если  $A_k^{(1)} = A_k^{(2)} = A_k$ , то

$$m_{12}^*(A_k) = \gamma c_k^{(1)} / (N_1 + s_1) + (1 - \gamma) c_k^{(2)} / (N_2 + s_2).$$

**Пример 5.7.** Задача состоит в выборе предприятий из четырех возможных для покупки их акций<sup>4</sup>. 100 экспертов из первой группы считают, что необходимо покупать акции второго предприятия; 60 экспертов из первой группы считают, что необходимо покупать акции второго или третьего предприятия; 8 экспертов из

<sup>3</sup>На самом деле приведенное утверждение спорно и не всегда выполняется, например при использовании большого множество оценок менее квалифицированных экспертов. С другой стороны, если большое количество даже менее квалифицированных экспертов дает близкие оценки, то можно предположить, что эти оценки достаточно точны. Поэтому в рамках предлагаемого правила комбинирования используется данное утверждение.

<sup>4</sup>Аналогичная задача без использования обобщенной модели Дирихле уже решалась в главе 2 (см. пример 2.6).

второй независимой группы считают, что необходимо покупать акции первого предприятия. Первый источник:  $N_1 = 160$ ,  $c_1^{(1)} = 100$ ,  $A_1^{(1)} = \{2\}$ ,  $c_2^{(1)} = 60$ ,  $A_2^{(1)} = \{2, 3\}$ . Второй источник:  $N_2 = 8$ ,  $c_1^{(2)} = 8$ ,  $A_1^{(2)} = \{1\}$ . Предположим, что параметры  $s_1$  и  $s_2$  одинаковы и равны 1. Тогда

$$\gamma = (160 + 1)/(160 + 8 + 1 + 1) = 0.947,$$

$$\underline{P}_1(\{1\}|\mathbf{c}^{(1)}, 1) = \frac{0}{160 + 1} = 0,$$

$$\underline{P}_2(\{1\}|\mathbf{c}^{(2)}, 1) = \frac{8}{8 + 1} = 0.889,$$

$$\overline{P}_1(\{1\}|\mathbf{c}^{(1)}, 1) = \frac{0 + 1}{160 + 1} = 0.006,$$

$$\overline{P}_2(\{1\}|\mathbf{c}^{(2)}, 1) = \frac{8 + 1}{8 + 1} = 1,$$

$$\underline{P}(\{1\}|\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}, s) = 0.947 \cdot 0 + (1 - 0.947) \cdot 0.889 = 0.047,$$

$$\overline{P}(\{1\}|\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}, s) = 0.947 \cdot 0.006 + (1 - 0.947) \cdot 1 = 0.059.$$

Аналогично получим вероятности других событий:

$$\underline{P}(\{2\}|\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}, s) = 0.588, \quad \overline{P}(\{2\}|\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}, s) = 0.953,$$

$$\underline{P}(\{3\}|\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}, s) = 0, \quad \overline{P}(\{3\}|\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}, s) = 0.365.$$

Приведенное правило комбинирования достаточно просто обобщить на случай нескольких источников данных.

### 5.9.2. Модифицированное правило комбинирования Демпстера

Рассмотрим, как изменится правило Демпстера при использовании расширенных функций доверия. Обозначим базовые вероятности для различных (первого и второго) источников как

$$m_1(A_i^{(1)}) = c_i^{(1)}/N_1, \quad m_2(A_j^{(2)}) = c_j^{(2)}/N_2.$$

Комбинированная базовая вероятность ( $m_{12}$ ), согласно правилу Демпстера, имеет вид

$$m_{12}(A) = \frac{1}{1 - K} \sum_{A_i^{(1)} \cap A_j^{(2)} = A} m_1(A_i^{(1)}) m_2(A_j^{(2)}),$$

где

$$K = \sum_{A_i^{(1)} \cap A_j^{(2)} = \emptyset} m_1(A_i^{(1)})m_2(A_j^{(2)}) \text{ и } m_{12}(\emptyset) = 0.$$

Для упрощения предполагается, что  $A_i^{(1)} \neq \Omega$ ,  $A_j^{(2)} \neq \Omega$  для всех  $i$  и  $j$ .

Функция  $K$  является базовой вероятностью, характеризующей противоречивость источников информации. Напомним, что правило комбинирования Демпстера не может использоваться, если  $K = 1$ , т.е. полностью противоречивые оценки не могут комбинироваться. Для работы с противоречивой информацией в рамках теории Демпстера–Шейфера было предложено правило дисконтирования [74], согласно которому базовые вероятности источников дисконтировались в соответствии с их надежностью. Дисконтирование во многих случаях требует наличия дополнительной “метаинформации”, которая может отсутствовать. Однако, используя свойства расширенных функций доверия, можно модифицировать правило комбинирования Демпстера, заменив базовые вероятности  $m_1(A_i^{(1)})$  и  $m_2(A_j^{(2)})$  новыми (дисконтированными) базовыми вероятностями  $m_1^*(A_i^{(1)}) = \varkappa_1 m_1(A_i^{(1)})$ ,  $m_2^*(A_j^{(2)}) = \varkappa_2 m_2(A_j^{(2)})$  и вероятностями  $m_1^*(\Omega) = 1 - \varkappa_1$ ,  $m_2^*(\Omega) = 1 - \varkappa_2$ , где

$$\varkappa_1 = N_1/(N_1 + s_1), \quad \varkappa_2 = N_2/(N_2 + s_2).$$

Отсюда модифицированная функция  $K^*$  вычисляется из соотношения

$$\begin{aligned} 1 - K^* &= \sum_{A_i^{(1)} \cap A_j^{(2)} \neq \emptyset} m_1^*(A_i^{(1)})m_2^*(A_j^{(2)}) = \\ &= (1 - K)\varkappa_1\varkappa_2 + \sum_i m_1^*(A_i^{(1)})m_2^*(\Omega) + \\ &+ \sum_j m_2^*(A_j^{(2)})m_1^*(\Omega) - m_1^*(\Omega)m_2^*(\Omega) = \\ &= 1 - \varkappa_1\varkappa_2K. \end{aligned}$$

Если  $A \neq \Omega$ , то

$$m_{12}^*(A) = \frac{\varkappa_1 \varkappa_2}{1 - K^*} \sum_{A_i^{(1)} \cap A_j^{(2)} = A} m_1(A_i^{(1)}) m_2(A_j^{(2)}) + \\ + \frac{\varkappa_1(1 - \varkappa_2)}{1 - K^*} m_1(A) + \frac{\varkappa_2(1 - \varkappa_1)}{1 - K^*} m_2(A).$$

Если  $A$  не принадлежит множествам фокальных элементов  $\{A_i^{(1)}\}$ ,  $\{A_j^{(2)}\}$ , то  $m_1(A) = 0$  и  $m_2(A) = 0$ . Если  $A = \Omega$ , то

$$m_{12}^*(\Omega) = (1 - \varkappa_1)(1 - \varkappa_2)/(1 - K^*).$$

Из приведенных выражений видно, что при  $s_i > 0$  всегда выполняется условие  $1 - K^* > 0$ . Следовательно, противоречивые данные могут быть всегда объединены при помощи модифицированного правила и это правило дает возможность работать с существенной несогласованностью источников информации.

**Пример 5.8.** Рассмотрим систему, состоящую из четырех элементов ( $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ ). После отказа системы 200 сенсоров (первый источник информации:  $N_1 = 200$ ,  $c_1^{(1)} = 200$ ) указывают, что первый элемент отказал ( $A_1^{(1)} = \{1\}$ ,  $m_1(A_1^{(1)}) = 1$ ), 3 сенсора (второй источник:  $N_2 = 3$ ,  $c_1^{(2)} = 3$ ) указывают, что второй элемент отказал ( $A_1^{(2)} = \{2\}$ ,  $m_2(A_1^{(2)}) = 1$ ). Если предположить, что  $s_1 = s_2 = 0$  (обычное правило комбинирования Демпстера), то  $K = 1$  (информация источников противоречива). Комбинированная функция доверия не может быть получена при помощи обычного правила Демпстера, несмотря на то что первый источник обеспечивает значительно больше данных по сравнению со вторым источником. В то же время если предположить, что  $s_1 = s_2 = 1$  (модифицированное правило комбинирования Демпстера), то  $\varkappa_1 = 200/201$ ,  $\varkappa_2 = 3/4$ ,

$$1 - K^* = 1 - \varkappa_1 \varkappa_2 = 0.2537,$$

$$m_{12}^*(A_1^{(1)}) = \varkappa_1(1 - \varkappa_2)m_1(A_1^{(1)})/0.2537 = 0.98,$$

$$m_{12}^*(A_1^{(2)}) = \varkappa_2(1 - \varkappa_1)m_2(A_1^{(2)})/0.2537 = 0.015,$$

$$m_{12}^*(\Omega) = (1 - \varkappa_1)(1 - \varkappa_2)/0.2537 = 0.005.$$

Если  $A = A_1^{(1)} = \{1\}$ , то

$$\underline{P}(A | (\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}), 1) = m_{12}^*(A_1^{(1)}) = 0.98,$$



$$\bar{P}(A|\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}, 1) = m_{12}^*(A_1^{(1)}) + m_{12}^*(\Omega) = 0.985.$$

Следовательно, с большей вероятностью (нижней и верхней) можно считать, что отказал первый элемент и модифицированное правило комбинирования Демпстера позволяет работать с противоречивой информацией.

## 5.10. Расширенные границы функции распределения и математического ожидания

Если множество  $\Omega \subset \mathbb{R}$  является подмножеством всех действительных чисел, ограниченных значениями  $\Omega_* = \inf \Omega$  и  $\Omega^* = \sup \Omega$ , то границы функции распределения случайной величины  $X$ , о которой имеются данные в виде интервалов  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , могут быть также расширены. Для этого необходимо найти нижние и верхние вероятности интервалов  $(-\infty, x]$ . Принимая во внимание условие  $t(\Omega) = 1$ , мы получим нижнюю и верхнюю функции распределения:

$$\begin{aligned} \underline{F}(x|\mathbf{c}, s) &= \underline{P}(\{\omega \leq x\}|\mathbf{c}, s) = \\ &= \begin{cases} (N + s)^{-1} \sum_{i:\sup A_i \leq x} c_i, & x < \Omega^* \\ 1, & x = \Omega^* \end{cases}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{F}(x|\mathbf{c}, s) &= \bar{P}(\{\omega \leq x\}|\mathbf{c}, s) = \\ &= \begin{cases} (N + s)^{-1} \left( s + \sum_{i:\inf A_i \leq x} c_i \right), & x > \Omega_* \\ 0, & x = \Omega_* \end{cases}. \end{aligned}$$

Заметим, что при  $s = 0$ , границы функций распределения совпадают с границами функций распределения, полученных в рамках теории Демпстера–Шейфера. Аналогичное заключение можно сделать и для границ математического ожидания  $X$ , которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_s X &= \int_{\Omega} \omega d\bar{F}(\omega|\mathbf{c}, s) = \\ &= (N + s)^{-1} \left( s \cdot \Omega_* + \sum_{i=1}^n c_i \cdot \inf A_i \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{E}}_s X &= \int_{\Omega} \omega d\underline{F}(\omega | \mathbf{c}, s) = \\ &= (N + s)^{-1} \left( s \cdot \Omega^* + \sum_{i=1}^n c_i \cdot \sup A_i \right).\end{aligned}$$

Из приведенных выражений для математического ожидания также следует, что при неограниченном множестве  $\Omega$ , т.е.  $\Omega = \mathbb{R}$ , границы математического ожидания также неограниченны, т.е.  $\underline{\mathbb{E}}_s X \rightarrow -\infty$  и  $\bar{\mathbb{E}}_s X \rightarrow \infty$ . Это является недостатком использования обобщенной модели Дирихле. Причина этого недостатка состоит в том, что ненулевая вероятность приписывается для всех возможных событий, которые даже никогда не наблюдались. Таким образом, положительное свойство, рассматриваемое как одно из достоинств обобщенной модели Дирихле для ограниченного множества исходов, становится отрицательным в некоторых случаях.

**Пример 5.9.** Вернемся к примеру 2.5 в разделе 2.4, в котором шесть экспертов оценивают стоимости акций фирмы в условных единицах на следующий день. Графики нижней и верхней функций распределения вероятностей при  $s = 1$  изображены на рис. 5.2 (графики  $\underline{F}_1$  и  $\bar{F}_1$ ). Для сравнения на том же рисунке показаны графики нижней и верхней функций распределения<sup>5</sup> при  $s = 0$  (графики  $\underline{F}$  и  $\bar{F}$ ).

Нижняя ожидаемая цена акций при  $s = 1$  равна

$$\underline{\mathbb{E}}_1 X = \frac{1}{6+1} (1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = 2.43,$$

а верхняя ожидаемая цена акций равна

$$\bar{\mathbb{E}}_1 X = \frac{1}{6+1} (1 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5) = 5.43.$$

Для сравнения границы ожидаемой цены акций при  $s = 0$  равны  $\underline{\mathbb{E}}_0 X = 2.833$  и  $\bar{\mathbb{E}}_0 X = 4.667$ .

## 5.11. Бета-биномиальная модель

### 5.11.1. Бета-биномиальное распределение

Большое количество прикладных задач связано с необходимостью определения вероятности того, что в течение неко-

<sup>5</sup>Эти же графики изображены на рис. 2.3.

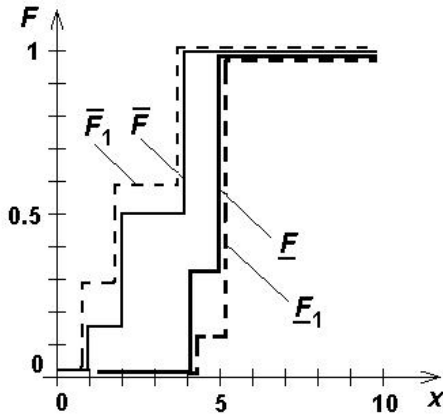


Рис. 5.2. Нижние и верхние границы функций распределения вероятностей

того периода наблюдений произойдет не менее или не более заданного количества определенных событий. Если известна вероятность  $\theta$  наступления события, то вероятность  $p(k|\theta)$  того, что произойдет  $k$  событий из  $n$  возможных, определяется на основе биномиального распределения

$$p(k|\theta) = C_n^k \theta^k (1 - \theta)^{n-k}.$$

Если вероятность  $\theta$  точно неизвестна и она сама является случайным числом с некоторой функцией плотности вероятности  $\pi(\theta|\vartheta)$ , то вероятность того, что произошло ровно  $k$  событий, определяется из выражения

$$P(k) = \int_{\Omega} p(k|\theta) \cdot \pi(\theta|\vartheta) d\theta.$$

Здесь  $\vartheta$  – вектор параметров распределения  $\pi$ ;  $\Omega = [0, 1]$  – множество значений параметра  $\theta$ .

В рассматриваемом случае для согласования априорного и апостериорного распределений в качестве функции  $\pi$  используется бета-распределение. Априорное бета-распределение случайной величины  $\theta$ , обозначаемое  $\text{Beta}(a, b)$ , имеет функ-

цию плотности вероятности<sup>6</sup>

$$\pi(\theta|a, b) = \text{Beta}(a, b) = \frac{1}{\text{B}(a, b)} \theta^{a-1} (1 - \theta)^{b-1}, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Здесь  $a > 0$ ,  $b > 0$  – параметры распределения, т.е.  $\vartheta = (a, b)$ ;  $\text{B}(a, b)$  – бета-функция.

Пусть в результате наблюдений из суммарного числа наблюдений  $N$  произошло  $K$  интересующих нас событий. Тогда апостериорное бета-распределение  $\pi(\theta|\vartheta, K)$  при условии получения статистических данных имеет следующий вид:

$$\pi(\theta|\vartheta, K) = \text{Beta}(a + K, b + N - K).$$

Действительно, используя теорему Байеса, можно записать:

$$\begin{aligned} \pi(\theta|\vartheta, K) &= \frac{\overbrace{C_N^K \theta^K (1 - \theta)^{N-K}}^{L(K|\theta)} \cdot \overbrace{\text{Beta}(a, b)}^{\pi(\theta|\vartheta)}}{C_N^K \underbrace{\frac{\text{B}(a + K, b + N - K)}{\text{B}(a, b)}}_{\text{Коэффициент нормализации}}} = \\ &= \frac{1}{\text{B}(a + K, b + N - K)} \theta^{a+K-1} (1 - \theta)^{b+N-K-1} = \\ &= \text{Beta}(a + K, b + N - K). \end{aligned}$$

Отсюда вероятность  $P(k)$  того, что произойдет ровно  $k$  определенных событий в будущем при общем числе наблюдений  $n$ , равна

$$\begin{aligned} P(k) &= \int_{\Omega} p(k|\theta) \cdot \pi(\theta|\vartheta, K) d\theta = \\ &= \int_0^1 C_n^k \theta^k (1 - \theta)^{n-k} \cdot \text{Beta}(a + K, b + N - K) d\theta = \\ &= C_n^k \frac{\text{B}(a + k + K, b + n + N - k - K)}{\text{B}(a + K, b + N - K)}. \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>Необходимо отметить, что бета-распределение используется в качестве априорного в рассматриваемой ситуации для поиска вероятности того, что произойдет  $k$  событий. В отличие от этого рассмотренный ранее частный случай распределения Дирихле используется для поиска вероятности того, что произойдет ровно одно событие.

Это – *бета-биномиальное распределение*. Вероятность того, что число интересующих событий не превысит  $M$ , равна

$$P_M = \sum_{k=0}^M C_n^k \frac{B(a+k+K, b+n+N-k-K)}{B(a+K, b+N-K)}.$$

Основной сложностью использования рассмотренного подхода является отсутствие сведений о параметрах  $a$  и  $b$ , т.е. отсутствие сведений об априорном распределении. Поэтому ниже приводится обобщенная бета-биномиальная модель, включающая множество бета-биномиальных распределений в качестве априорных.

### 5.11.2. Обобщенная бета-биномиальная модель

Заменим в выражении для бета-биномиального распределения  $P(k)$  параметры  $a = s\alpha$  и  $b = s - s\alpha$ . Здесь параметр  $s > 0$  определяет влияние априорного распределения на апостериорные вероятности. Параметр  $\alpha$  находится в пределах от 0 до 1. Тогда

$$P(k) = C_n^k \frac{B(s\alpha + k + K, s - s\alpha + n + N - k - K)}{B(s\alpha + K, s - s\alpha + N - K)}.$$

Уолли [132] предложил обобщенную бета-биномиальную модель, которая определяется как множество всех бета-биномиальных распределений с фиксированным параметром  $s$  и множеством параметров  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Вероятность  $P_M$  того, что число интересующих событий не превысит  $M$ , монотонно убывает с увеличением параметра  $\alpha$ . Поэтому, минимизируя и максимизируя  $P_M$  по всем значениям  $\alpha$  от 0 до 1, можно достаточно просто получить нижнюю (при  $\alpha = 1$ ) и верхнюю (при  $\alpha = 0$ ) границы вероятности  $P_M$ , которые равны<sup>7</sup>

$$P_M = \sum_{k=0}^M C_n^k \frac{B(s+k+K, n+N-k-K)}{B(s+K, N-K)}, \quad (5.7)$$

---

<sup>7</sup> Аналогичный подход был использован при построении обобщенной модели Дирихле.

$$\bar{P}_M = \sum_{k=0}^M C_n^k \frac{B(k+K, s+n+N-k-K)}{B(K, s+N-K)}. \quad (5.8)$$

При этом, если  $K = 0$ , то  $\bar{P}_M = 1$ . Перед получением каких-либо наблюдений имеем  $K = N = 0$ , и, следовательно,  $\underline{P}_M = 0$ ,  $\bar{P}_M = 1$ . Другими словами, если ничего не известно о поведении случайной величины, то вероятности событий могут быть любые в пределах от 0 до 1.

Заметим, что при  $\alpha = 0$  вектор параметров  $(a, b)$  бета-биномиального распределения равен  $(0, s)$ , а при  $\alpha = 1$  он равен  $(s, 0)$ . В то же время значение математического ожидания вероятности  $\theta$  наступления события для априорного бета-распределения при  $K = N = 0$  равно  $\mathbb{E}\theta = a/(a+b) = \alpha$ . Таким образом, при изменении  $\alpha$  от 0 до 1 математическое ожидание вероятности  $\theta$  пробегает все возможные значения, каждое из которых соответствует некоторой точке на отрезке, ограниченном двумя точками  $(0, s)$  и  $(s, 0)$ .

К сожалению, определение нижней и верхней границ вероятности  $P(k)$  сопряжено со значительными вычислительными трудностями, так как в общем случае эта вероятность не является монотонной функцией параметра  $\alpha$ .

### 5.11.3. Применение бета-биномиального распределения в модели страхования

Теория страхования и актуарные расчеты приобретают все большее значение в условиях развития рынка страховых услуг и повышающейся конкуренции на этом рынке страховых компаний. Поэтому в настоящее время существует огромное количество публикаций, посвященных определению параметров страхования, таких как оптимальный размер страховых премий, страховых выплат, оптимальное количество договоров и т.д. Случайная природа страховых случаев не позволяет однозначно определить параметры страхования и всегда существует некоторый риск разорения страховой компании. Актуарные расчеты призваны определять параметры страхования так, чтобы минимизировать риск разорения или ограничить его некоторым предельным значением.

Очевидно, что корректность и целесообразность актуарных расчетов во многом определяется адекватностью используемой в расчетах вероятностной модели работы страховой компании. Адекватность модели, в свою очередь, зависит от наличия достаточно полной априорной информации о статистических свойствах и характеристиках страховых случаев. Для многих областей страхования такая информация обычно имеется в распоряжении. В то же время в новых областях страхования, где статистические данные о страховых случаях являются неполными и разнородными, использование существующих моделей может привести к значительным ошибкам планирования страховой деятельности и в конечном итоге к повышенному риску разорения.

Для осторожного принятия решений предлагаются модели, учитывающие неполноту априорной информации о страховых случаях.

Рассмотрим коротко известную модель индивидуального страхования дискретного времени, подробное описание и анализ которой представлен Бойковым [151]. Предположим, что компания заключает  $n$  однотипных договоров с одинаковым сроком действия  $t$  и возможными выплатами по  $i$ -му договору  $X_i$ . Страховая премия за каждый договор равна  $c$ . Тогда собранные к моменту времени  $t$  премии составляют  $\Pi(t) = cn$ , а суммарные выплаты  $R(t) = X_1 + \dots + X_n$ . Здесь  $X_i$  – случайная величина, определяемая наступлением страхового случая за время  $t$ . Если обозначить индикатор наступления  $i$ -го страхового случая  $I_i$ , а размер выплаты  $y_i$ , то  $X_i = I_i \cdot y_i$  и существует некоторая вероятность наступления  $i$ -го страхового случая  $\Pr\{I_i = 1\} = q$ . Вероятность неразорения определяется в этом случае как

$$P_M = \Pr\{\Pi(t) \geq R(t)\} = \Pr\{cn \geq X_1 + \dots + X_n\}.$$

Если случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  независимы, значения параметров  $c$  и  $n$  фиксированы,  $y_i = y$  для всех  $i = 1, \dots, n$ , то задача определения вероятности неразорения достаточно просто решается введением случайной величины  $K$  числа страховых случаев, имеющей биномиальное распределение  $p(k|\theta)$

с параметром  $\theta$ . При этом вероятность неразорения равна

$$P_M = \sum_{k=0}^M p(k|\theta).$$

Здесь  $M$  – максимальное количество исков, которые компания может оплатить, определяемое как  $M = \lfloor \Pi(t)/y \rfloor = \lfloor cn/y \rfloor$ , символ  $\lfloor \cdot \rfloor$  означает целую часть числа “снизу”.

Как видно из описания модели, вероятность неразорения может быть вычислена с использованием байесовского подхода, а именно с применением обобщенной бета-биномиальной модели и выражений (5.7)–(5.8).

**Пример 5.10.** Рассмотрим числовой пример применения обобщенной модели. Пусть страховая компания заключила  $n = 100$  договоров. При наступлении страхового случая выплачивается сумма  $y = 100$  по одному договору. Премия по одному договору составляет  $c = 12$ . Максимальное количество исков, которые компания может оплатить, равно  $M = \lfloor cn/y \rfloor = 12 \cdot 100/100 = 12$ . Предположим, что нет никакой информации о страховых случаях рассматриваемого типа, т.е.  $K = 0$ . Тогда нижняя и верхняя границы вероятности неразорения при  $s = 1$  равны  $\underline{P}_{12} = 0$ ,  $\bar{P}_{12} = 1$ . Предположим теперь, что в результате наблюдений из суммарного числа  $N = 20$  договоров ранее произошел  $K = 1$  страховой случай. Тогда нижняя и верхняя границы вероятности неразорения при  $s = 1$  равны

$$\underline{P}_{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{100}^k \frac{B(1+k+1, 100+20-k-1)}{B(1+1, 20-1)} = 0.72,$$

$$\bar{P}_{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{100}^k \frac{B(k+1, 1+100+20-k-1)}{B(1, 1+20-1)} = 0.92.$$

Однако если принять  $s = 0$ , то получим  $\underline{P}_{12} = \bar{P}_{12} = 0.909$ . Как видно из полученных результатов, оценка вероятности неразорения 0.909 слишком оптимистична при столь небольшой выборке наблюдаемых в прошлом событий.

Таким образом, использование обобщенной бета-биномиальной модели позволяет принимать более осторожные решения о параметрах страхования, когда информация об аналогичных страховых случаях в прошлом достаточно бедна и неточна.



## 5.12. Отрицательная биномиальная модель

### 5.12.1. Отрицательное биномиальное распределение

Если рассматривается число определенных событий за некоторый интервал времени  $t$ , то одним из наиболее распространенных законов распределения для описания соответствующих вероятностей является распределение Пуассона с параметром  $\lambda$ , характеризующим интенсивность этих событий. Вероятность  $k$  событий за время  $t$ , в соответствии с распределением Пуассона, имеет следующий вид:

$$p(k) = \frac{(\lambda t)^k \exp(-\lambda t)}{k!}.$$

Если интенсивность событий  $\lambda$  точно неизвестна, то предполагая, что она сама является случайным числом с некоторой функцией плотности вероятности  $\pi(\lambda|\vartheta)$ , можно использовать байесовский подход. При этом для согласования априорного и апостериорного распределений функция  $\pi$  должна соответствовать плотности гамма-распределения. Априорное гамма-распределение случайной величины  $\lambda$ , обозначаемое  $\text{Gamma}(a, b)$ , имеет функцию плотности вероятности

$$\begin{aligned} \pi(\lambda) &= \text{Gamma}(a, b) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} b^a \lambda^{a-1} \exp(-b\lambda), \quad \lambda > 0. \end{aligned}$$

Здесь  $a > 0$ ,  $b > 0$  – параметры распределения, т.е.  $\vartheta = (a, b)$ ;  $\Gamma(a)$  – гамма-функция.

Пусть в течении  $n$  периодов наблюдений в прошлом произошло в сумме  $K = \sum_{i=1}^n k_i$  событий. Здесь  $k_i$  – число событий на  $i$ -м периоде наблюдений. Тогда апостериорная функция плотности вероятности  $\pi(\lambda|K)$  гамма-распределения при условии получения статистических данных в форме  $K$  событий за  $n$  периодов наблюдений имеет следующий вид:

$$\pi(\lambda|K) = \text{Gamma}(a + K, b + n).$$

Отсюда вероятность  $P(k)$  того, что произойдет ровно  $k$

событий в будущем при условии  $t = 1$ , имеет вид:

$$\begin{aligned}
 P(k) &= \int_0^\infty p(k|\lambda) \cdot \pi(\lambda|\vartheta) d\lambda = \\
 &= \int_0^\infty \frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!} \cdot \text{Gamma}(a, b) \cdot d\lambda = \\
 &= \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^a \left(\frac{1}{b+1}\right)^k.
 \end{aligned}$$

Это – *отрицательное биномиальное распределение*. Отсюда вероятность того, что число интересующих событий не превысит  $M$ , равна

$$P_M = \sum_{k=0}^M \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)k!} \cdot \left(\frac{b}{b+1}\right)^a \left(\frac{1}{b+1}\right)^k.$$

Вероятности  $P(k)$  также определяются при помощи рекуррентной формулы

$$P(k) = \begin{cases} \left(\frac{b}{b+1}\right)^a, & k = 0 \\ \frac{a+k-1}{k(b+1)} \cdot P(k-1), & k \geq 1 \end{cases}.$$

Рассмотрим случай, когда времена предыдущих  $n$  периодов наблюдений не являются одинаковыми и равны соответственно  $t_1, \dots, t_n$ . При этом суммарное время наблюдений равно  $T = t_1 + \dots + t_n$ . Количество событий, наблюдаемое в каждом периоде, равно  $k_1, \dots, k_n$ , а их суммарное число за время  $T$  равно  $K = k_1 + \dots + k_n$ . Это более общий и интересный случай, так как на практике трудно ожидать, что исходные статистические данные собирались в течение тех же периодов времени, что и период прогнозирования  $t$ .

Пусть  $n = 1$ . Используя теорему Байеса, получим апостериорную плотность вероятности:

$$\frac{\text{Pr}\{X = k_1|\lambda\} \cdot \text{Gamma}(\lambda|a, b)}{\text{Pr}\{X = k_1\}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k!} (\lambda t_1)^k \exp(-\lambda t_1) \cdot \frac{1}{\Gamma(a)} b^a \lambda^{a-1} \exp(-b\lambda) \\
&= \frac{\Gamma(a+k_1)}{\Gamma(a)k_1!} \cdot \left(\frac{b}{b+t_1}\right)^a \left(\frac{t_1}{b+t_1}\right)^{k_1} = \\
&= (b+t_1)^a \lambda^{a+k_1-1} \exp(-\lambda(b+t_1)) = \\
&= \text{Gamma}(a+k_1, b+t_1).
\end{aligned}$$

Отсюда вероятность  $k$  событий за время  $t$  при условии, что за период наблюдения  $t_1$  произошло  $k_1$  событий, равна

$$\begin{aligned}
P(k) &= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k \exp(-\lambda t)}{k!} \cdot \text{Gamma}(a+k_1, b+t_1) d\lambda = \\
&= \frac{(b+t_1)^{a+k_1} t^k}{k! \cdot \Gamma(a+k_1)} \int_0^\infty \lambda^{k+a+k_1-1} \exp(-\lambda(b+t_1+t)) d\lambda = \\
&= \frac{(b+t_1)^{a+k_1} t^k}{k! \cdot \Gamma(a+k_1)} \cdot \frac{\Gamma(a+k_1+k)}{(b+t_1+t)^{a+k_1+k}} \times \\
&\times \int_0^\infty \text{Gamma}(a+k_1+k, b+t_1+t) d\lambda = \\
&= \frac{\Gamma(a+k_1+k)}{\Gamma(a+k_1)k!} \cdot \left(\frac{b+t_1}{b+t_1+t}\right)^{a+k_1} \left(\frac{t}{b+t_1+t}\right)^k.
\end{aligned}$$

Аналогичное выражение для  $P(k)$  можно получить для произвольного значения  $n \geq 1$ . При этом, как следует из результирующих выражений, полученная вероятность не зависит от распределения числа событий  $k_1, \dots, k_n$  и от распределения времени наблюдения  $t_1, \dots, t_n$ , а определяется только суммарным числом событий  $K$  и суммарным временем наблюдений  $T$ , т.е.

$$P(k) = \frac{\Gamma(a+K+k)}{\Gamma(a+K)k!} \cdot \left(\frac{b+T}{b+T+t}\right)^{a+K} \left(\frac{t}{b+T+t}\right)^k.$$

В частном случае, когда все временные интервалы одинаковы и имеют единичную длительность, вероятность  $k$  событий за единичный интервал времени имеет вид

$$P(k) = \frac{\Gamma(a+K+k)}{\Gamma(a+K)k!} \cdot \left(\frac{b+n}{b+n+1}\right)^{a+K} \left(\frac{1}{b+n+1}\right)^k.$$

Вероятность  $P_M$  определяется как

$$P_M = \sum_{k=0}^M \frac{\Gamma(a + K + k)}{\Gamma(a + K)k!} \cdot \left( \frac{b + T}{b + T + t} \right)^{a+K} \left( \frac{t}{b + T + t} \right)^k.$$

Необходимо отметить, что приведенное выражение для вероятности  $P_M$  может быть переписано в другом виде

$$P_M = 1 - \frac{V_q(M + 1, r)}{V(M + 1, r)},$$

где

$$r = a + K, \quad q = \frac{t}{b + T + t};$$

$V_q(M + 1, r)$  – неполная бета-функция, определяемая как

$$V_q(M + 1, r) = \int_0^q x^M (1 - x)^{r-1} dx.$$

Если  $q = 1$ , то неполная бета-функция совпадает с бета-функцией, т.е.  $V_1(M + 1, r) = V(M + 1, r)$ .

### 5.12.2. Обобщенная отрицательная биномиальная модель

Рассмотрим множество значений векторов параметров  $(a, b)$  в треугольнике с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(s, 0)$ ,  $(0, s)$ . Здесь параметр  $s > 0$  определяет влияние априорного распределения на апостериорные вероятности. Так как математическое ожидание  $\mathbb{E}\lambda$  интенсивности событий  $\lambda$  определяется из соотношения  $\mathbb{E}\lambda = a/b$ , то множество точек в треугольнике соответствует всем возможным значениям  $\mathbb{E}\lambda$  в интервале  $[0, \infty)$ .

**Утверждение 5.1.** *Обозначим  $a/b = c$ . Максимальное значение вероятности  $P_M$ , или ее верхняя граница  $\bar{P}_M$ , достигается при  $c \rightarrow 0$  или в любой точке  $(a, b) = (0, s)$ ,  $s > 0$ . Отсюда*

$$\bar{P}_M = \sum_{k=0}^M \frac{\Gamma(K + k)}{\Gamma(K)k!} \cdot \left( \frac{s + T}{s + T + t} \right)^K \left( \frac{t}{s + T + t} \right)^k.$$

Минимальное значение вероятности  $P_M$ , или ее нижняя граница  $\underline{P}_M$ , достигается при  $c \rightarrow \infty$  или в любой точке  $(a, b) = (s, 0)$ ,  $s > 0$ . Отсюда

$$\underline{P}_M = \sum_{k=0}^M \frac{\Gamma(s + K + k)}{\Gamma(s + K)k!} \cdot \left(\frac{T}{T+t}\right)^{s+K} \left(\frac{t}{T+t}\right)^k.$$

Доказательство утверждения можно найти в приложении к главе.

Заметим, что перед получением каких-либо наблюдений имеем  $K = T = 0$  и, следовательно,  $\underline{P}_M = 0$  и  $\overline{P}_M = 1$ . Другими словами, если ничего не известно о поведении случайной величины, то вероятности событий могут быть любые в пределах от 0 до 1.

### 5.12.3. Применение отрицательного биномиального распределения в модели гарантийных обязательств

Производство, закупки и продажа товара обычно связаны с риском того, что часть изделий после покупки или в процессе эксплуатации выйдет из строя, откажет или не сможет выполнять часть своих функций. Одним из способов минимизации или компенсации этого риска являются гарантийные обязательства. В соответствии с гарантийными обязательствами производитель определяет время, в течение которого отказавшие изделия будут отремонтированы, заменены или покупателю возмещен ущерб. Время действия гарантийного обязательства, величина возмещения ущерба, стоимость товара, его количество и т.д. могут рассматриваться как параметры гарантийных обязательств. При этом значения параметров выбираются так, чтобы потери вследствие отказов изделий в определенном смысле не превышали доходов от производства и продажи этих изделий. Поэтому неправильно оцененные параметры гарантийных обязательств могут привести к существенным потерям для производителя и продавца.

Оценка и оптимизация параметров гарантийных обязательств – одна из важных задач теории принятия решений.

Как в любой задаче принятия решений, оптимальность решения или риск ошибочного решения полностью определяется имеющейся в распоряжении информацией о состояниях природы, которая в свою очередь зависит от знания распределения вероятностей, определенного на состояниях природы. В терминах гарантийных обязательств необходимо знать вероятностные характеристики надежности изделий или параметры распределений вероятностей, например числа отказавших изделий за заданное время.

Рассмотрим поток изделий между производителем и потребителем. Следующая схема гарантийных обязательств является достаточно типовой. Пусть  $n$  – число изделий, которые покупатель хотел бы приобрести<sup>8</sup>. Предполагается, что все эти изделия одинаковые. На каждое изделие устанавливается срок гарантии  $t$  (единиц времени). Покупатель готов заплатить  $x$  (денежных единиц) за одно изделие, а также готов не требовать возмещения убытков при отказе не более  $z$  изделий в интервале времени  $[0, t]$ . Однако за каждый отказ изделия свыше  $z$  покупатель требует компенсации  $y$  денежных единиц за одно отказавшее изделие<sup>9</sup>.

Задача оптимизации параметров гарантийных обязательств с точки зрения производителя заключается в выборе оптимальных в некотором смысле значений  $z$  и  $y$ .

Предположим, что себестоимость производства одного изделия равна  $c$  единиц. Тогда при отказе  $z$  или менее изделий в течение времени  $t$  прибыль производителя равна  $B = n(x - c)$ . Однако если произошло  $i > z$  отказов изделий за время  $t$ , то производитель обязан выплатить по гарантийным обязательствам  $(i - z)y$  и прибыль равна  $B = n(x - c) - (i - z)y$ .

Заметим, что наиболее важный параметр гарантийных обязательств – время  $t$ . Поэтому для описания потока отказов в течение этого времени и для вычисления вероятности  $p(i|\lambda)$  появления  $i$  отказов за это время распределение Пуассона с

---

<sup>8</sup>Здесь предполагается, что покупателем или потребителем изделий является магазин как промежуточная ступень между производителем и конечным покупателем. Можно рассматривать также и конечного покупателя, но тогда  $n = 1$ , и это является частным случаем общей схемы.

<sup>9</sup>В частном случае параметр  $z$  равен 0.

параметром  $\lambda$  является наиболее предпочтительным<sup>10</sup>.

Ожидаемые выплаты, в соответствии с гарантийными обязательствами, можно рассматривать как математическое ожидание

$$\sum_{i=z+1}^n y(i-z)p(i|\lambda).$$

Отсюда ожидаемый доход производителя при заданном распределении  $p(i|\lambda)$  определяется как разность между прибылью  $n(x-c)$  от продажи  $n$  изделий с учетом их цены, себестоимости и ожидаемыми выплатами в соответствии с гарантийными обязательствами, т.е.

$$\mathbb{E}_p B = n(x-c) - \sum_{i=z+1}^n y(i-z)p(i|\lambda). \quad (5.9)$$

Таким образом, ожидаемый доход зависит от интенсивности отказов  $\lambda$ . Если ожидаемый доход больше 0, то гарантийные обязательства можно считать неубыточными и эффективными. В противном случае, их необходимо пересмотреть в пользу производителя. Аналогичная постановка задачи также рассмотрена в работах Авена [4] и Сингпурвалла [76].

Заметим, что схема гарантийных обязательств близка к схеме страхования, но в отличие от цели задачи страхования цель данной задачи заключается в вычислении математического ожидания  $\mathbb{E}_p B$ , а не функции распределения вероятностей. Тем не менее схема доказательства остается аналогичной. Используя отрицательное биномиальное распределение, несложно получить следующее выражение для ожидаемого дохода при известных параметрах  $(a, b)$ , а также при условии, что за время  $T$  наблюдений произошло  $K$  отказов [177]:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p B = n(x-c) - y \sum_{k=z+1}^n \frac{(k-z)\Gamma(a+K+k)}{\Gamma(a+K)k!} \times \\ \times \left( \frac{b+T}{b+T+t} \right)^{a+K} \left( \frac{t}{b+T+t} \right)^k. \end{aligned}$$

---

<sup>10</sup>Необходимо отметить, что биномиальное распределение и его обобщение (обобщенная бета-биномиальная модель) также могут использоваться здесь для описания вероятностей отказов.

Рассмотрим множество значений векторов параметров  $(a, b)$  в треугольнике с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(s, 0)$ ,  $(0, s)$ . Для вычисления нижней и верхней границ ожидаемого дохода  $\mathbb{E}_p B$  необходимо доказать, что  $\mathbb{E}_p B$  убывает с возрастанием отношения  $a/b = d$ .

**Утверждение 5.2.** *Нижняя граница  $\mathbb{E}_p B$  ожидаемого дохода достигается при  $(a, b) = (s, 0)$  и определяется как*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p B &= n(x - c) - y \sum_{k=z+1}^n \frac{(k - z)\Gamma(s + K + k)}{\Gamma(s + K)k!} \times \\ &\times \left( \frac{T}{T + t} \right)^{s+K} \left( \frac{t}{T + t} \right)^k. \end{aligned}$$

*Верхняя граница  $\bar{\mathbb{E}}_p B$  ожидаемого дохода достигается при  $(a, b) = (0, s)$  и определяется как*

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}_p B &= n(x - c) - y \sum_{k=z+1}^n \frac{(k - z)\Gamma(K + k)}{\Gamma(K)k!} \times \\ &\times \left( \frac{s + T}{s + T + t} \right)^K \left( \frac{t}{s + T + t} \right)^k. \end{aligned}$$

Доказательство утверждения можно найти в приложении к главе.

Если  $s = 0$ , то границы ожидаемого дохода совпадают. Перед получением каких-либо сведений об отказах, т.е. при  $K = T = 0$ , границы ожидаемого дохода имеют вид:

$$\mathbb{E}_p B = n(x - c) - y(n - z)$$

$$\bar{\mathbb{E}}_p B = n(x - c).$$

**Пример 5.11.** Производитель продает партию товаров в размере  $n = 100$  штук по цене  $x = 200\$$  за единицу товара при его себестоимости  $c = 160\$$ . Срок гарантийных обязательств  $-t = 1$  год. При испытаниях вышли из строя  $K = 2$  изделия за суммарный период наблюдений  $T = 3$ . При отказе свыше  $z = 1$  изделия осуществляется возмещение убытков. Найдем оптимальное значение выплат для возмещения убытков  $y$  за каждое отказавшее изделие. Используем



сначала точное априорное отрицательное биномиальное распределение с параметрами<sup>11</sup>  $a = 1$  и  $b = 1$ . Тогда ожидаемый доход равен

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_p B &= 100 \cdot 40 - y \sum_{k=2}^{100} \frac{(k-1)\Gamma(3+k)}{\Gamma(3)k!} \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^k = \\ &= 4000 - y \cdot 0.262.\end{aligned}$$

Отсюда условие положительного ожидаемого дохода имеет вид:

$$4000 - y \cdot 0.262 \geq 0$$

и  $y \leq 15267$ . Это значение указывает на то, что производитель готов заплатить 15267\$ за каждую отказавшую в течение года единицу товара, чтобы иметь положительный ожидаемый доход.

Рассмотрим теперь применение обобщенной модели для вычисления интервала значений  $y$ . Границы ожидаемого дохода при  $s = 1$  равны

$$\begin{aligned}\underline{\mathbb{E}}_p B &= 100 \cdot 40 - y \sum_{k=2}^{100} \frac{(k-1)\Gamma(3+k)}{\Gamma(1+2)k!} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^k = \\ &= 4000 - y \cdot 0.422,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{E}}_p B &= 100 \cdot 40 - y \sum_{k=2}^{100} \frac{(k-1)\Gamma(2+k)}{\Gamma(2)k!} \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^k = \\ &= 4000 - y \cdot 0.14.\end{aligned}$$

Отсюда верхняя граница  $y$  определяется из уравнения  $\overline{\mathbb{E}}_p B = 0$  и равна  $\overline{y} = 28571$ . Нижняя граница определяется из уравнения  $\underline{\mathbb{E}}_p B = 0$  и равна  $\underline{y} = 9479$ . Очевидно, что значение  $y$  сильно связано со значением  $z$ . При этом незначительное увеличение  $z$  приводит к существенному росту  $y$ .

Интересно исследовать, как время наблюдений влияет на границы значений  $y$ . При этом значения числа отказов  $K$  вычисляются при условии, что интенсивность отказов  $\lambda = K/T$  является постоянной и равна  $2/3$ . Соответствующие графики нижних и верхних границ значений  $y$  в зависимости от времени наблюдений  $T$  при  $s = 1$  показаны на рис. 5.3. Можно заметить из графиков, что ширина интервала  $[\underline{y}, \overline{y}]$  уменьшается с ростом  $T$  и стремится к предельному значению, которое определяется из выражения (5.9).

---

<sup>11</sup>Отрицательное биномиальное распределение с параметрами  $a = 1$ ,  $b = 1$  является одним из неинформативных априорных распределений.

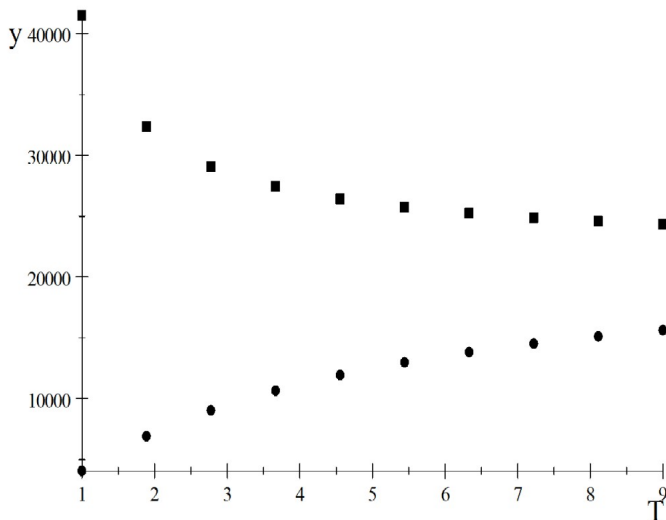


Рис. 5.3. Нижние и верхние границы  $y$  в зависимости от  $T$  при  $s = 1$

## 5.13. Гамма-экспоненциальная модель

### 5.13.1. Гамма-экспоненциальное распределение

Во многих случаях для описания распределения вероятностей непрерывных случайных величин  $X$ , например времени безотказной работы элементов оборудования, используют экспоненциальное распределение, которое имеет следующий вид:

$$\Pr\{X < t\} = F(t|\lambda) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Здесь  $\lambda$  – параметр распределения или интенсивность рассматриваемых событий. Если интенсивность событий  $\lambda$  точно неизвестна, то предполагая, что она сама является случайным числом с некоторой функцией плотности вероятности  $\pi(\lambda|\vartheta)$ , можно снова использовать байесовский подход. При этом для согласования априорного и апостериорного распределений функция  $\pi$  должна быть гамма-распределением  $\text{Gamma}(a, b)$ .

Используя преобразования, представленные выше, получим вероятность того, что за время  $t$  в будущем произойдет

событие

$$\begin{aligned}\Pr\{X < t\} &= P(t) = \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t}) \cdot \text{Gamma}(a, b) d\lambda = \\ &= 1 - \left(\frac{b}{b+t}\right)^a.\end{aligned}$$

Это – гамма-экспоненциальное распределение.

Если за время  $T$  произошло  $K$  событий, то апостериорная вероятность того, что за время  $t$  в будущем произойдет одно событие, например отказ, равна

$$\Pr\{X < t\} = P(t) = 1 - \left(\frac{b+T}{b+t+T}\right)^{a+K}.$$

### 5.13.2. Обобщенная гамма-экспоненциальная модель

По аналогии с рассмотренной обобщенной отрицательной биномиальной моделью рассмотрим множество значений векторов параметров  $(a, b)$  в треугольнике с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(s, 0)$ ,  $(0, s)$ . Так как математическое ожидание  $\mathbb{E}\lambda$  интенсивности событий  $\lambda$  определяется из соотношения  $\mathbb{E}\lambda = a/b$ , то множество точек в треугольнике соответствует всем возможным значениям  $\mathbb{E}\lambda$  в интервале  $[0, \infty)$ . Достаточно просто доказать, что максимальное значение вероятности  $P(t)$ , или ее верхняя граница  $\bar{P}(t)$ , достигается в любой точке  $(a, b) = (0, s)$ ,  $s > 0$ . Отсюда [178]

$$\bar{P}(t) = 1 - \left(\frac{s+T}{s+t+T}\right)^K.$$

Минимальное значение вероятности  $P(t)$ , или ее нижняя граница  $\underline{P}(t)$ , достигается в любой точке  $(a, b) = (s, 0)$ ,  $s > 0$ . Отсюда

$$\underline{P}(t) = 1 - \left(\frac{T}{t+T}\right)^{s+K}.$$

## 5.14. Заключение

Принципиальное преимущество байесовских методов по сравнению с частотными заключается в том, что байесовские методы могут в принципе дать некоторые результаты, даже если совсем нет выборочных данных. Это связано с использованием априорного распределения вероятностей, которое при отсутствии статистических данных не изменяется, и пересчитанное по теореме Байеса апостериорное распределение совпадает с априорным. В то же время необходимо отметить, что в задачу книги не входит детальное рассмотрение и анализ традиционного байесовского подхода, так как большое количество публикаций посвящено ему. Приведенный материал, касающийся стандартного байесовского подхода (раздел 5.1), служит только для краткого введения к изучению обобщенных моделей.

Обобщенные модели открывают целое направление исследований в статистике, в рамках которого многие недостатки традиционных байесовских моделей могут быть преодолены. Одним из главных таких недостатков является сложность или невозможность определения неинформативного априорного распределения. Эта проблема достаточно эффективно решена в обобщенных моделях заменой одного априорного распределения множеством распределений. Сужение этого множества по мере накопления статистической информации отражает, во-первых, тот факт, что полученные данные поддерживают исходные гипотезы о распределениях, а во-вторых, то, что получаемая информация снижает степень неопределенности и незнания, которые имели место до ее получения и использования.

Интересен тот факт, что обобщенные байесовские модели позволяют модифицировать другие модели, используемые для описания неопределенности. В частности, благодаря обобщенной модели Дирихле были получены расширенные функции доверия и правдоподобия с новыми замечательными свойствами. Расширение этих функций может оказаться чрезвычайно полезным, когда информация об элементах множества элементарных событий ограничена. Так как расширенные

границы совпадают с аналогичными границами, полученными при использовании модели  $\epsilon$ -засорения, это дает возможность различным образом трактовать расширенные характеристики. Другим важным свойством расширенных функций доверия и правдоподобия является возможность их модификации по мере поступления новой информации в виде новых событий или экспертных оценок, что обеспечивается свойствами обобщенной модели Дирихле. Расширенные функции доверия и правдоподобия являются также функциями доверия и правдоподобия, что делает возможным использование всех свойств стандартных функций доверия и правдоподобия и всех правил комбинирования и методов теории Демпстера–Шейфера.

Необходимо отметить определенную связь между робастными моделями, обобщенной моделью Дирихле, полиномиальной моделью и случайными множествами. Эта связь стала явной после применения обобщенных моделей к различным способам описания неточности и неопределенности. Она позволяет понять некоторые параметрические особенности различных моделей и выявить их слабые и сильные стороны.

Эффективность обобщенных моделей продемонстрирована на практических примерах, включая модели страхования и гарантийных обязательств. Очевидно, что класс таких моделей будет расширяться по мере анализа практических задач.

Несмотря на все достоинства представленных байесовских моделей, открытым остается вопрос выбора параметра осторожности  $s$  для этих моделей. Аргументы, приведенные в работах [7, 8, 9, 79, 132], к сожалению, не убеждают в правильности выбора того или иного значения в различных задачах. Поэтому необходимы дополнительные исследования в будущем для более четкой и строгой аргументации выбора значений этого параметра.

## 5.15. Приложение к главе 5

**Доказательство утверждения 5.1.** Докажем, что вероятность  $P_M$  убывает с увеличением параметра  $s$  в интервале  $[0, \infty)$ . Веро-

ятность  $P_M$  может быть переписана как

$$P_M = 1 - \frac{B_q(M+1, r)}{B(M+1, r)},$$

где

$$r = cb + K, \quad q = \frac{t}{b + T + t}.$$

Обозначим  $r + \Delta r = b(c + \Delta c) + K$ ,  $\Delta c > 0$ . Тогда для доказательства убывания вероятности  $P_M$  при увеличении  $c$  достаточно доказать неравенство

$$1 - \frac{B_q(M+1, r)}{B(M+1, r)} \geq 1 - \frac{B_q(M+1, r + \Delta r)}{B(M+1, r + \Delta r)}$$

или неравенство

$$\frac{\int_0^q x^M (1-x)^{r-1} dx}{\int_0^1 x^M (1-x)^{r-1} dx} \leq \frac{\int_0^q x^M (1-x)^{r-1} (1-x)^{\Delta r} dx}{\int_0^1 x^M (1-x)^{r-1} (1-x)^{\Delta r} dx}. \quad (5.10)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^M (1-x)^{r-1} dx &= A, \\ \int_0^q x^M (1-x)^{r-1} dx &= B, \\ \int_q^1 x^M (1-x)^{r-1} dx &= C. \end{aligned}$$

Согласно теореме о среднем значении интеграла можно записать:

$$\begin{aligned} \int_0^q x^M (1-x)^{r-1} (1-x)^{\Delta r} dx &= z_1 B, \\ \int_q^1 x^M (1-x)^{r-1} (1-x)^{\Delta r} dx &= z_2 C, \end{aligned}$$

и правая часть неравенства (5.10) может быть переписана в следующем виде:

$$\frac{z_1 B}{z_1 B + z_2 C}.$$

Здесь  $z_1, z_2 \geq 0$  — значения функции  $(1-x)^{\Delta r}$  в некоторых точках от 0 до 1 или средние значения интегралов  $B$  и  $C$  в соответствии с теоремой о среднем значении интеграла. Тогда условие монотонности можно переписать в виде

$$\frac{B}{A} \leq \frac{z_1 B}{z_1 B + z_2 C}.$$

Так как функция  $(1-x)^{\Delta r}$  является убывающей, то  $z_1 \geq z_2$  или  $z_1 = z_2 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \geq 0$ . Используя условия  $A = B + C$  и  $B \leq A$ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{z_1 B}{z_1 B + z_2 C} &= \frac{z_1 B}{z_2 B + z_2 C + \varepsilon B} = \frac{z_1 B}{z_2 A + \varepsilon B} = \\ &= \frac{z_2 B + \varepsilon B}{z_2 A + \varepsilon B} \geq \frac{z_2 B}{z_2 A} = \frac{B}{A}. \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что  $P_M$  как функция параметров  $a = s$  и  $b = 0$  меньше, чем  $P_M$  при условиях  $a_1 = s - \varepsilon$  и  $b_1 = 0 + \zeta$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\zeta > 0$ . Используя представление функции  $P_M$  в точке  $M$  через отношение бета-функции и неполной бета-функции, необходимо доказать неравенство:

$$\frac{\int_0^q x^M (1-x)^{s+K-1} dx}{\int_0^1 x^M (1-x)^{s+K-1} dx} \geq \frac{\int_0^{q-\Delta} x^M (1-x)^{s-\varepsilon+K-1} dx}{\int_0^1 x^M (1-x)^{s-\varepsilon+K-1} dx}. \quad (5.11)$$

Здесь  $q = t/(T+t)$  и  $q - \Delta = t/(\zeta + T + t)$ . Обозначим

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^M (1-x)^{s+K-1} dx &= A, \quad \int_0^q x^M (1-x)^{s+K-1} dx = B, \\ \int_q^1 x^M (1-x)^{s+K-1} dx &= C, \quad \int_{q-\Delta}^q x^M (1-x)^{s-\varepsilon+K-1} dx = D. \end{aligned}$$

Здесь  $D \geq 0$ . Из теоремы о среднем значении интеграла следует

$$\begin{aligned} \int_0^q x^M (1-x)^{s-\varepsilon+K-1} dx &= z_1 B, \\ \int_q^1 x^M (1-x)^{s-\varepsilon+K-1} dx &= z_2 C. \end{aligned}$$

Правая часть неравенства (5.11) может быть переписана как

$$\frac{z_1 B - D}{z_1 B + z_2 C}.$$

Здесь  $z_1, z_2 \geq 0$  – значения функции  $(1-x)^{-\varepsilon}$  в некоторой точке от 0 до 1 или средние значения интегралов  $B$  и  $C$  в соответствии с теоремой о среднем значении интеграла. Тогда условие монотонности можно переписать в виде

$$\frac{B}{A} \geq \frac{z_1 B - D}{z_1 B + z_2 C}.$$

Так как функция  $(1-x)^{-\varepsilon}$  возрастает, то верно неравенство  $z_1 \leq z_2$  или  $z_1 = z_2 - \epsilon$ ,  $\epsilon \geq 0$ . Используя условие  $A = B + C$  и  $B \leq A$ , получаем:

$$\frac{z_1 B - D}{z_1 B + z_2 C} = \frac{z_1 B - D}{z_2 B + z_2 C - \varepsilon B} = \frac{z_2 B - D - \varepsilon B}{z_2 A - \varepsilon B} \leq \frac{z_2 B}{z_2 A} = \frac{B}{A},$$

что требовалось доказать. ■

**Доказательство утверждения 5.2.** Выразим ожидаемый доход через функцию распределения числа отказов  $P_i$

$$P_i = \sum_{k=0}^i P(k).$$

Обозначим

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} P(k) = 1 - P_n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_p B &= n(x-c) - y \sum_{k=z+1}^n kP(k) + yz \sum_{k=z+1}^n P(k) = \\ &= n(x-c) + yz(P_n - P_z) - y \sum_{k=z+1}^n kP(k). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=z+1}^n kP(k) &= z \sum_{k=z+1}^n P(k) + \sum_{k=1}^{n-z} kP(z+k) = \\ &= z(P_n - P_z) + \sum_{k=0}^{n-z-1} (P_n - P_{z+k}) = \\ &= nP_n - zP_z - \sum_{k=0}^{n-z-1} P_{z+k}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathbb{E}_p B = n(x-c) - y(n-z)P_n + y \sum_{k=0}^{n-z-1} P_{z+k}. \quad (5.12)$$

В соответствии с утверждением 5.1, функция  $P_i$  убывает при увеличении  $d$ .



Обозначим  $\Delta P_k = P_k(d + \Delta d) - P_k(d)$ . Теперь докажем, что  $\Delta P_k \geq \Delta P_{k+1}$ . Для этого необходимо доказать следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \frac{B_q(k+1, r + \Delta r)}{B(k+1, r + \Delta r)} - \frac{B_q(k+1, r)}{B(k+1, r)} \geq \\ & \geq \frac{B_q(k+2, r + \Delta r)}{B(k+2, r + \Delta r)} - \frac{B_q(k+2, r)}{B(k+2, r)}. \end{aligned}$$

Из теоремы о среднем значении интеграла следует

$$\begin{aligned} B_q(k+2, r) &= x_2 B, \quad x_2 \in [0, q], \\ B(k+2, r) &= x_2 B + x_3 C, \quad x_3 \in [q, 1]. \end{aligned}$$

Отсюда необходимо доказать неравенство

$$\frac{z_1 B}{z_1 B + z_2 C} - \frac{B}{B + C} - \frac{z_1 x_2 B}{z_1 x_2 B + z_2 x_3 C} + \frac{x_2 B}{x_2 B + x_3 C} \geq 0.$$

Обозначим  $\delta = x_3/x_2 \geq 1$ . После упрощения левой части неравенства получаем

$$(z_1 + z_2)BC(\delta - 1) + z_2 C^2(\delta^2 - 1) \geq 0.$$

Последнее неравенство очевидно. Отсюда  $\Delta P_k \geq \Delta P_{k+1}$ .

Возвращаясь к (5.12) и используя последнее доказанное свойство функции распределения, получаем:

$$(n - z)\Delta P_n \leq \sum_{k=0}^{n-z-1} \Delta P_{z+k}.$$

Отсюда следует, что ожидаемый доход  $\mathbb{E}_p B$  уменьшается с ростом  $d$ . Верхняя граница доказывается аналогично. ■

## Глава 6

### Модели неопределенности второго порядка

Никакую проблему нельзя решить на том же уровне, на котором она возникла.

*Альберт Эйнштейн*

#### 6.1. Ненадежные оценки

Экспертные оценки могут быть важной частью информации во многих ситуациях. Более того, иногда они являются единственной информацией, имеющейся в распоряжении. Поэтому вопросам обработки и комбинирования экспертных оценок всегда уделялось много внимания [14, 38, 141]. Для того чтобы получить полезную информацию от экспертов, необходимо иметь соответствующую модель описания неопределенности для моделирования или формализации тех элементов данных, которые предоставляются экспертом.

С одной стороны, экспертные оценки являются обычно неточными, например интервальными, вследствие ограниченных возможностей человека. Поэтому для их формализации и комбинирования использовался соответствующий математический аппарат, например теория свидетельств [24, 75] (см. главу 2), теория возможностей [155] (см. главу 3). Однако оценки могут быть также разнородными. Например, одни оценки могут относиться к вероятностям некоторых значений случайной величины, а другие оценки относятся к математическому ожиданию этой случайной величины. Для их комбинирования наиболее эффективным инструментом являют-

ся интервальные вероятности [131, 138, 161]. С другой стороны, экспертные оценки являются обычно ненадежными. Очевидно, что оценки надежных экспертов должны быть более значимыми, чем оценки ненадежных экспертов, если такая информация об экспертах имеется. Однако здесь возникают следующие противоречия и трудности, связанные в основном с тем фактом, что оценки являются неточными. Во-первых, качество экспертов чаще всего описывается их весами. Хотя многие авторы [14] и утверждают, что веса не являются вероятностями, однако они имеют свойства вероятностей и операции с весами осуществляются так же, как и с вероятностями. Возникает вопрос, как соотносятся оценки, полученные от экспертов, с различными весами и как интерпретировать неточные оценки? Естественный путь интерпретации, например, интервальных оценок, заключается в том, что интервальная оценка параметра рассматривается как интервал, в который попадает некоторое неизвестное истинное значение этого параметра с некоторой вероятностью. А вероятность очевидно, определяется прежде всего надежностью эксперта. Тогда сталкиваемся со следующим противоречием. Предположим, что очень надежный эксперт предоставил слишком узкий интервал некоторой статистической характеристики. Как относиться к его оценке? В то же время предположим, что другой абсолютно ненадежный эксперт предоставил очень широкий интервал, скажем, интервал вероятности от 0 до 1. Несмотря на то что второй эксперт ненадежен, его оценка абсолютно верна<sup>1</sup>. Если принимать показатель надежности эксперта в качестве вероятности или какой-либо меры доверия к его оценке, то получаем, что вероятность более узкого интервала больше, чем вероятность более широкого, что является противоречием. Если не рассматривать надежность оценки как некоторую вероятность, то как тогда обрабатывать оценки типа “среднее значение случайной величины находится в интер-

---

<sup>1</sup>Здесь не рассматривается фактор информативности оценки. Предполагается, что оценки могут быть произвольными и учитывать такие свойства экспертов, как чрезвычайно завышенная уверенность (эксперт предоставляет узкие интервалы) и чрезвычайно завышенная осторожность (эксперт предоставляет слишком широкие интервалы) [26].

вале от 3 до 5 с вероятностью более 0.95”, которые получены не в результате экспертного опроса, а на основе статистической обработки наблюдений и отражают доверительный интервал математического ожидания с заданной доверительной вероятностью?

Таким образом, необходимо разработать процедуры, которые бы учитывали не только качество эксперта, но и его оценок. Универсальной и наиболее обоснованной процедурой комбинирования и обработки оценок в рамках интервальных вероятностей является процедура продолжения интервальных средних. Однако стандартная процедура продолжения предполагает, что все экспертные оценки имеют одинаковое качество или надежность. Более того, эта процедура рассматривает оценки как абсолютно надежные. Это один из основных ее недостатков, который приводит к невозможности продолжения в том случае, если экспертные оценки являются противоречивыми. Это следует из того, что ограничения в задаче линейного программирования, соответствующие экспертным оценкам, образуют пустое множество распределений вероятностей  $\mathcal{M}$  и задача программирования не имеет решения.

Рассмотрим два простых примера, иллюстрирующие сказанное выше.

**Пример 6.1.** Два эксперта дают оценки вероятности дождя на следующий день  $p \leq 0.1$  и  $p \geq 0.1$  соответственно. Используя стандартную процедуру продолжения, получаем комбинированную вероятность дождя  $p = 0.1$ . Трудно поверить, что из двух абсолютно различных и неточных экспертных оценок получается абсолютно точный результат.

**Пример 6.2.** Получены три разнородные оценки:

$$p_3 \geq 0.7, \quad p_2 \geq 0.5, \quad 1 \leq \mathbb{E}X \leq 2,$$

о значениях дискретной случайной величины  $X$ , принимающей три значения с неизвестными вероятностями  $p = (p_1, p_2, p_3)$ . Множество ограничений, соответствующих этим оценкам, имеет вид:

$$0 \leq p_1 \leq 1,$$

$$0.5 \leq p_2 \leq 1,$$

$$\begin{aligned}
0.7 &\leq p_3 \leq 1, \\
1 &\leq 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 \leq 2, \\
p_1 + p_2 + p_3 &= 1.
\end{aligned}$$

Невозможно получить новые оценки на основе имеющейся информации, так как неравенства несовместны и область допустимых решений пуста.

Комбинирование разнородных экспертных оценок, позволяющее учитывать качество экспертов, может быть осуществлено при помощи *иерархических моделей неопределенности*, а именно при помощи *моделей второго порядка*. Эти модели описывают неопределенность посредством двух уровней. Если вернуться к примеру с доверительным интервалом средних значений и доверительной вероятностью, то информация о математическом ожидании представляет первый уровень, а интервал вероятностей  $[0.95, 1]$  – второй уровень.

Использование иерархических моделей и их подробное описание можно найти в работах [20, 22, 88], где приводятся аргументы в защиту того, что наиболее общими моделями являются байесовские модели [6, 43, 44, 71, 147]. Согласно этим моделям предполагается, что существуют вероятности второго порядка, которые можно рассматривать как характеристики качества экспертных оценок. Более того, эти вероятности являются точными, что существенно ограничивает применение этого класса моделей.

Уолли [135], де Куман и др. [19, 39] предложили интерпретировать *нечеткую вероятность* как частный случай иерархической модели. При этом второй уровень модели представлен мерой возможности, которую, в свою очередь, можно рассматривать как частный случай интервальных вероятностей [21]. Нау [65] предложил описывать степени доверия экспертам в качестве интервальных вероятностей, названных им *доверительными весами*, на втором уровне иерархической модели. Гудмэн и Нгуен [44] также предложили одну из иерархических моделей, учитывающую неопределенность на обоих уровнях.

Главным недостатком большинства предлагаемых моделей является необходимость использования точного распределе-

ния вероятностей на втором уровне, что существенно ограничивает их применение вследствие отсутствия такой информации во многих реальных случаях.

Другим недостатком является использование однородных оценок на обоих уровнях. Поэтому в работах [87] и [92, 97, 99, 100, 110] были предложены обобщенные иерархические модели, вероятности второго уровня которых являются интервальными. Эти модели учитывают возможное отсутствие информации о распределении на всех уровнях иерархии. Наиболее простой класс моделей с однородной информацией на первом уровне рассмотрен в работах [55, 56, 57]. Этот класс моделей является частным случаем обобщенных моделей. Исследованию некоторых типов моделей второго порядка посвящены работы [107, 109, 112, 115].

Ниже будут рассмотрены обобщенные иерархические модели второго порядка и их расширение на основе модели Дирихле.

## 6.2. Три задачи обработки оценок

Предположим, что имеется  $m$  экспертных оценок в виде нижней  $\underline{a}_k$  и верхней  $\bar{a}_k$  границы математического ожидания (интервальных средних) функций  $h_k$  случайной величины  $X$ , т.е.,  $\underline{a}_k = \underline{\mathbb{E}}h_k$ ,  $\bar{a}_k = \bar{\mathbb{E}}h_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Для простоты предполагается также, что  $X$  является дискретной и значения  $X$  принадлежат  $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Пусть каждый из  $m$  экспертов характеризуется интервалом субъективной вероятности  $[\underline{v}_k, \bar{v}_k]$ . Тогда формально экспертные оценки можно представить в следующем виде:

$$\Pr \{ \underline{a}_k \leq \mathbb{E}_p h_k \leq \bar{a}_k \} \in [\underline{v}_k, \bar{v}_k], \quad k = 1, \dots, m. \quad (6.1)$$

Условие (6.1) трактуется следующим образом. Неизвестно точное значение величины  $\mathbb{E}_p h_k$ , но известно, что оно находится в интервале  $[\underline{a}_k, \bar{a}_k]$  с некоторой вероятностью, которая, в свою очередь, также точно неизвестна, но находится в интервале  $[\underline{v}_k, \bar{v}_k]$ .

Рассмотрим теперь более внимательно математическое

ожидание

$$\mathbb{E}_p h_k = \sum_{i=1}^n h_k(x_i) p_i, \quad (6.2)$$

где  $p = (p_1, \dots, p_n)$  – неизвестное распределение вероятностей случайной величины  $X$ . Следует отметить, что математическое ожидание  $\mathbb{E}_p h_k$  само является некоторой случайной величиной  $Z_k$ , принимающей некоторое множество значений  $\Theta_k = [\inf_{x_i} h_k(x_i), \sup_{x_i} h_k(x_i)]$  и имеющей плотность вероятности  $\psi$ . О величине  $Z_k$  известно, что ее плотность  $\psi$  удовлетворяет условиям

$$\underline{v}_k \leq \int_{\underline{a}_k}^{\bar{a}_k} \psi(z) dz \leq \bar{v}_k, \quad (6.3)$$

$$\int_{\Theta_k} \psi(z) dz = 1. \quad (6.4)$$

Приведенные оценки можно представить при помощи  $n$ -мерного единичного симплекса вероятностей  $p$ . Интервалы  $[\underline{a}_k, \bar{a}_k]$  первого уровня образуют “пятна” на этом симплексе. А над этими пятнами возвышаются “горы” всех возможных плотностей  $\psi$  второго уровня, удовлетворяющих условиям (6.3)–(6.4). Вне этих пятен также существуют “горы” плотностей  $\psi$ , удовлетворяющих условию (6.4).

Основными целями построения моделей являются:

- 1) вычисление интервала вероятностей  $[\underline{v}, \bar{v}]$  для нового интервала  $A = [\underline{a}, \bar{a}]$  математического ожидания  $\mathbb{E}_p g(X)$ ;
- 2) вычисление ожидаемого или “усредненного” интервала<sup>2</sup>  $[a_*, a^*]$  математического ожидания  $\mathbb{E}_p g(X)$ ;
- 3) пересчет границ вероятностей  $\underline{v}_k$  и  $\bar{v}_k$  после наблюдения события  $B$ .

---

<sup>2</sup>Необходимо отметить, что первая задача является частным случаем второй задачи, когда функция  $g(X)$  является индикаторной. Однако первая задача рассматривается отдельно, так как позволяет в более простой форме представить предлагаемый метод решения.

Ниже очевидные ограничения для распределения вероятностей  $p_i \geq 0$  и  $\sum_{x_i \in \Omega} p_i = 1$  не всегда будут записываться. Кроме того, обозначим  $\mathbf{h}_k = (h_k(x_1), \dots, h_k(x_n))^T$  и  $\mathbf{g} = (g(x_1), \dots, g(x_n))^T$ . Тогда можно записать математические ожидания  $\mathbb{E}_p h_k$  и  $\mathbb{E}_p g$  в сокращенной форме

$$\mathbb{E}_p h_k = \sum_{i=1}^n h_k(x_i) p_i = p \cdot \mathbf{h}_k,$$

$$\mathbb{E}_p g = \sum_{i=1}^n g(x_i) p_i = p \cdot \mathbf{g}.$$

Ниже также указание на распределение  $p$  при записи математического ожидания для сокращения записи не будет использоваться.

### 6.3. Вычисление интервала вероятностей (первая задача)

Предположим, что математические ожидания  $\mathbb{E}h_i$ ,  $\mathbb{E}g$  сами являются случайными величинами  $Z_i$ ,  $Z$ , определенными на  $\Theta_i = [\inf \mathbb{E}h_i, \sup \mathbb{E}h_i]$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\Theta = [\inf \mathbb{E}g, \sup \mathbb{E}g]$  с плотностями  $\psi_i$ ,  $\psi$  соответственно (см. предыдущий раздел). Введем обозначения для событий  $A_i = \{\underline{a}_i \leq Z_i \leq \bar{a}_i\}$ ,  $A = \{\underline{a} \leq Z \leq \bar{a}\}$ .

Если все функции одинаковы, т.е. выполняется условие  $h_i(X) = g(X)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , то  $Z_i = Z$  и  $\Theta_i = \Theta$  для всех  $i = 1, \dots, m$  и задачи оптимизации для вычисления  $\underline{v}$  и  $\bar{v}$  имеют следующий вид:

$$\underline{v} = \min_{\mathcal{R}} \int_{\Theta} I_A(z) \psi(z) dz,$$

$$\bar{v} = \max_{\mathcal{R}} \int_{\Theta} I_A(z) \psi(z) dz \quad (6.5)$$

при ограничениях

$$\underline{v}_i \leq \int_{\Theta} I_{A_i}(z) \psi(z) dz \leq \bar{v}_i, \quad i \leq m. \quad (6.6)$$



Здесь минимум и максимум вычисляются по всему множеству  $\mathcal{R}$  возможных плотностей  $\psi$ , удовлетворяющих условиям (6.6),  $I_{A_i}(z)$  – индикаторная функция, принимающая значение 1, если  $z \in A_i$ , а в остальных случаях – значение 0. Соответствующая двойственная задача для вычисления нижней границы  $\underline{v}$  имеет вид [55, 56]:

$$\underline{v} = \underline{\mathbb{E}}I_A(g) = \max_{c_0, c_i, d_i} \left( c_0 + \sum_{i=1}^m (c_i \underline{v}_i - d_i \bar{v}_i) \right) \quad (6.7)$$

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

$$c_0 + \sum_{i=1}^m (c_i - d_i) I_{A_i}(z) \leq I_A(z), \quad \forall z \in \Theta. \quad (6.8)$$

Задача линейного программирования для вычисления верхней границы  $\bar{v}$  имеет вид:

$$\bar{v} = \bar{\mathbb{E}}I_A(g) = \min_{c_0, c_i, d_i} \left( c_0 + \sum_{i=1}^m (c_i \bar{v}_i - d_i \underline{v}_i) \right)$$

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

$$c_0 + \sum_{i=1}^m (c_i - d_i) I_{A_i}(z) \geq I_A(z), \quad \forall z \in \Theta.$$

Приведенные задачи достаточно просто решаются, так как число ограничений является конечным благодаря тому, что в правой и левой части неравенств имеют место только индикаторные функции, принимающие значения 0 и 1. Количество ограничений определяется взаимным расположением интервалов  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $A$ .

**Пример 6.3.** Вернемся к примеру 6.1, предполагая, что первый эксперт имеет степень доверия в интервале от 0.5 до 0.6, а второй – в интервале от 0.3 до 0.4. Определим степень доверия к тому, что вероятность дождя в интервале от 0.1 до 0.3. Пусть функция  $h_1(x_1) = 1$  (есть дождь) и  $h_1(x_2) = 0$  (нет дождя). Заметим, что  $h_1(x_i) = h_2(x_i) = g(x_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда информация экспертов может быть формально записана следующим образом:

$$\Pr \{0 \leq \mathbb{E}h_1 \leq 0.1\} \in [0.5, 0.6],$$

$$\Pr \{0.1 \leq \mathbb{E}h_2 \leq 1\} \in [0.3, 0.4],$$

$$\Pr \{0.1 \leq \mathbb{E}g \leq 0.3\} \in [\underline{v}, \bar{v}].$$

В терминах введенных обозначений можно записать<sup>3</sup>

$$\underline{a}_1 = 0, \bar{a}_1 = 0.1, \underline{a}_2 = 0.1, \bar{a}_2 = 1,$$

$$\underline{v}_1 = 0.5, \bar{v}_1 = 0.6, \underline{v}_2 = 0.3, \bar{v}_2 = 0.4.$$

Так как функции  $h_1, h_2, g$  одинаковы, то нижняя  $\underline{v}$  граница степени доверия к оценке  $0.1 \leq p \leq 0.3$  вычисляется из (6.7)–(6.8):

$$\underline{v} = \max_{c_0, c_i, d_i} (c_0 + 0.5c_1 - 0.6d_1 + 0.3c_2 - 0.4d_2)$$

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+, c_0 \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \forall z \in [0, 1],$

$$c_0 + (c_1 - d_1) I_{[0,0.1]}(z) + (c_2 - d_2) I_{[0.1,1]}(z) \leq I_{[0.1,0.3]}(z).$$

Заметим, что при  $z < 0.1$  ограничения одинаковы и имеют вид

$$c_0 + (c_1 - d_1) \leq 0.$$

При  $z = 0.1$  ограничение имеет вид

$$c_0 + (c_1 - d_1) + (c_2 - d_2) \leq 1.$$

При  $z \in (0.1, 0.3]$  ограничения имеют вид

$$c_0 + (c_2 - d_2) \leq 1.$$

При  $z \in (0.3, 1]$  ограничения имеют вид

$$c_0 + (c_2 - d_2) \leq 0.$$

Таким образом, получена простая задача линейного программирования, имеющая четыре ограничения, рассмотренные выше, и четыре ограничения вида  $c_i, d_i \geq 0$ . Решение задачи:  $c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = 0, d_1 = 0, d_2 = 0$  и  $\underline{v} = 0$ . Решение аналогичной задачи для вычисления верхней границы степени доверия:  $c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = 1, d_1 = 0, d_2 = 0$  и  $\bar{v} = 0.4$ .

Найдем теперь “усредненные” границы вероятности дождя. В этом случае (6.7)–(6.8) записываются как

$$\underline{v} = \max_{c_0, c_i, d_i} (c_0 + 0.5c_1 - 0.6d_1 + 0.3c_2 - 0.4d_2)$$

---

<sup>3</sup>Здесь границы  $\underline{a}_1 = 0$  и  $\bar{a}_2 = 1$  взяты из условия, что вероятность находится в интервале от 0 до 1.

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ ,

$$c_0 + (c_1 - d_1) I_{[0,0.1]}(z) + (c_2 - d_2) I_{[0.1,1]}(z) \leq z, \quad \forall z \in [0, 1].$$

Оказывается, что число ограничений для этой задачи также конечно в силу монотонности функции  $z$ . Ограничения имеют вид:

$$\begin{aligned} c_0 + (c_1 - d_1) &\leq 0, \\ c_0 + (c_1 - d_1) + (c_2 - d_2) &\leq 0.1, \\ c_0 + (c_2 - d_2) &< 0.1, \\ c_0 + (c_2 - d_2) &\leq 0.3. \end{aligned}$$

Отсюда нижняя граница вероятности дождя равна 0.04. Ограничения для задачи вычисления верхней границы имеют вид:

$$\begin{aligned} c_0 + (c_1 - d_1) &\geq 0, \\ c_0 + (c_1 - d_1) + (c_2 - d_2) &\geq 0.1, \\ c_0 + (c_2 - d_2) &> 0.1, \\ c_0 + (c_2 - d_2) &\geq 0.3. \end{aligned}$$

Отсюда верхняя граница вероятности дождя равна 0.46.

Рассмотрим теперь случай, когда все функции  $h_1, \dots, h_m, g$  различны. Основная сложность анализа этого случая заключается в том, что, с одной стороны, нельзя считать переменные  $Z_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $Z$  независимыми, а с другой стороны, в явном виде невозможно определить, как связаны они друг с другом. Можно только утверждать, что связь осуществляется через общие распределения вероятностей  $p$  в (6.2). Поэтому ниже предлагается подход, который позволяет найти требуемые характеристики.

Пусть  $J$  – множество индексов и  $J \subseteq N = \{1, 2, \dots, m\}$ . Обозначим следующие множества ограничений:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_J &= \{A_i, i \in J\} = \{\underline{a}_i \leq \mathbb{E}h_i \leq \bar{a}_i, i \in J\}, \\ \mathcal{A}_0 &= \{A\} = \{\underline{a} \leq \mathbb{E}g \leq \bar{a}\}, \quad \mathcal{A}_J^c = \{A_i^c, i \in J\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$A_j^c = \left( \inf_x h_j(x) \leq \mathbb{E}h_j \leq \underline{a}_j \right) \cup \left( \bar{a}_j \leq \mathbb{E}h_j \leq \sup_x h_j(x) \right). \quad (6.9)$$

Отметим, что вероятности событий  $A_i$ ,  $i \in J$  могут быть представлены как математические ожидания следующих индикаторных функций:

$$I_{A_i}(z_i) = I_{A_i}(\mathbb{E}h_i) = I_{A_i}(p \cdot \mathbf{h}_i).$$

Пусть  $\Psi(z_1, \dots, z_m)$  – совместная плотность вероятности случайных величин  $Z_1, \dots, Z_m$ . Тогда верхняя граница вероятности  $\bar{v} = \overline{\mathbb{E}I_A}(\mathbb{E}g) = \overline{\mathbb{E}I_A}(Z)$  может быть получена как решение следующей задачи оптимизации:

$$\bar{v} = \max_{\mathcal{R}} \int_{\Theta \times \Theta_1 \times \dots \times \Theta_m} I_A(z) \Psi(z_1, \dots, z_m) dz dz_1 \cdots dz_m$$

при ограничениях для  $i = 1, \dots, m$ ,

$$v_i \leq \int_{\Theta_1 \times \dots \times \Theta_m} I_{A_i}(z_i) \Psi(z_1, \dots, z_m) dz_1 \cdots dz_m \leq \bar{v}_i.$$

Здесь  $\mathcal{R}$  – множество всех возможных совместных плотностей вероятности  $\Psi$ .

Соответствующая двойственная задача имеет вид:

$$\bar{v} = \min_{c_0, c_i, d_i} \left\{ c_0 + \sum_{i=1}^m (c_i \bar{v}_i - d_i v_i) \right\} \quad (6.10)$$

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

$$c_0 + \sum_{i=1}^m (c_i - d_i) I_{A_i}(z_i) \geq I_A(z), \quad \forall z \in \Theta, \quad \forall z_i \in \Theta_i. \quad (6.11)$$

Ограничения (6.11) могут быть переписаны как

$$c_0 + \sum_{i=1}^m (c_i - d_i) I_{A_i}(p \cdot \mathbf{h}_i) \geq I_A(p \cdot \mathbf{g}), \quad p \in \mathcal{P}. \quad (6.12)$$

Здесь  $\mathcal{P}$  – множество всех распределений  $p$ . Рассмотрим представленные ограничения более детально. Для того чтобы вычислить индикаторные функции, необходимо перебрать

все возможные распределения  $p$  из  $\mathcal{P}$ , подставить их в ограничения и вычислить соответствующие суммы как аргументы индикаторных функций. Очевидно, что эта задача не может быть решена практически. Поэтому предлагается другой путь для решения задачи оптимизации (6.10)–(6.11).

Основная идея заключается в следующем. Заметим, что после подстановки всех функций распределения  $p$  можно получить набор ограничений, в которых вместо индикаторных функций стоят значения 0 и 1. Очевидно, что число таких ограничений не может быть более  $2^{m+1}$ , что соответствует двоичным векторам длины  $m + 1$ . Однако далеко не все ограничения могут быть записаны таким образом. Это связано с тем, что для некоторых двоичных векторов значений индикаторных функций невозможно найти хотя бы одно распределение  $p$ , удовлетворяющее ограничениям типа  $A_i$  и  $A_i^c$ . Таким образом, основная задача заключается в том, как найти такие двоичные вектора.

Пусть  $\mathcal{P}_i$  – множество распределений вероятностей  $p$ , удовлетворяющее ограничению  $\underline{a}_i \leq \mathbb{E}h_i \leq \bar{a}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и  $\mathcal{P}_0$  – множество распределений вероятностей  $p$ , удовлетворяющее ограничению  $\underline{a} \leq \mathbb{E}g \leq \bar{a}$ . Будем говорить, что множество ограничений  $\mathcal{A}_J$  является *согласованным*, если существует хотя бы одно распределение  $p \in \mathcal{R}_J$ , удовлетворяющее всем ограничениям с индексами, принадлежащими  $J$ , т.е.

$$\mathcal{R}_J = \bigcap_{i \in J} \mathcal{P}_i \neq \emptyset. \quad (6.13)$$

Согласованное множество определяет наличие соответствующего ограничения в (6.10)–(6.12).

Пусть  $\mathcal{C}$  – множество всех согласованных множеств  $\mathcal{A}_J$ , т.е. множеств с  $\mathcal{R}_J \neq \emptyset$ . Заметим, что в случае согласованности множества ограничений  $\mathcal{A}_J \cup \mathcal{A}_{N \setminus J}^c$  выполняются условия

$$I_{A_i}(\mathbb{E}h_i) = \begin{cases} 1, & i \in J \\ 0, & i \in N \setminus J \end{cases}$$

и

$$c_0 + \sum_{i \in J} (c_i - d_i) \geq I_A(p \cdot \mathbf{g}).$$

Более того, если множество  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \cup \mathcal{A}_0$  согласованно, то

$$c_0 + \sum_{i \in J} (c_i - d_i) \geq 1, \quad (6.14)$$

иначе

$$c_0 + \sum_{i \in J} (c_i - d_i) \geq 0. \quad (6.15)$$

Другими словами, если множество  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$  является согласованным, то существует по крайней мере такое одно распределение  $p$ , что все значения  $\mathbb{E}h_i$ ,  $i \in J$  находятся в интервалах  $[\underline{a}_i, \bar{a}_i]$  и их индикаторные функции равны 1, все значения  $\mathbb{E}h_j$ ,  $j \in N \setminus J$  не принадлежат интервалам  $[\underline{a}_j, \bar{a}_j]$  и их индикаторные функции равны 0. Если расширенное множество  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \cup \mathcal{A}_0$  является согласованным, то существует по крайней мере одно распределение  $p$ , удовлетворяющее дополнительному ограничению  $\mathcal{A}_0$ . Даже если  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \cup \mathcal{A}_0$  является согласованным и неравенство (6.14) выполняется, могут существовать распределения  $p$ , которые формируют неравенство (6.15). Однако ограничение (6.15) следует из ограничения (6.14). Поэтому оно может быть удалено и не рассматриваться.

Следует отметить, что объединение двух событий в (6.9) означает, что согласованность множества  $\mathcal{A}_J^c \cup \mathcal{A}_J$  определяется согласованностью хотя бы одного из множеств, составляющих объединение.

Таким образом, для упрощения ограничений (6.11) необходимо перебрать все согласованные множества  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$ . Тогда ограничения (6.11) могут быть переписаны для любого  $J \subseteq N$  следующим образом:

$$c_0 + \sum_{i \in J} (c_i - d_i) \geq \begin{cases} 1, & \mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \cup \mathcal{A}_0 \in \mathcal{C} \\ 0, & \mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \cup \mathcal{A}_0 \notin \mathcal{C} \end{cases}. \quad (6.16)$$

Если  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$  является несогласованным, то соответствующее неравенство

$$c_0 + \sum_{i \in J} (c_i - d_i) \geq 0 \text{ или } 1$$

исключается из списка всех ограничений.

Теперь возникает вопрос, как определить согласованность множеств  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$  или  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \cup \mathcal{A}_0$ ? Условие (6.13) выполняется, если задача линейного программирования с ограничениями  $\mathcal{A}_J$  имеет решение. Действительно, если существует хотя бы одна функция распределения вероятностей  $p$ , удовлетворяющая всем ограничениям  $\mathcal{A}_J$ , то задача оптимизации с этими ограничениями имеет решение, так как область допустимых решений не пуста. Другими словами, для определения согласованности множества  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$  для любого  $J$  необходимо решить задачу линейного программирования

$$\min_p \left( \max_p \right) \sum_{x \in \Omega} \varphi(x) p(x)$$

при ограничениях

$$p \cdot \mathbf{h}_i \in A_i, \quad i \in J, \quad p \cdot \mathbf{h}_j \in A_j^c, \quad j \in N \setminus J.$$

Здесь  $\varphi$  – произвольная функция. Эту задачу оптимизации можно рассматривать как продолжение интервальных средних первого уровня  $\{\underline{a}_i, \bar{a}_i, i \in J\}$  на интервальные средние функции  $\varphi$ . Тип функции  $\varphi$  не имеет значения, так как основная цель решения задачи линейного программирования заключается в определении наличия какого-либо решения. Соответствующая двойственная задача линейного программирования имеет вид:

$$\min_{c_0, c_i, d_i} \left( c_0 + \sum_{i \in J} (c_i \bar{a}_i - d_i \underline{a}_i) + \sum_{i \in N \setminus J} (c_i \bar{a}_i^c - d_i \underline{a}_i^c) \right) \quad (6.17)$$

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

$$c_0 + \sum_{i=1}^m (c_i - d_i) h_i(x) \geq \varphi(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (6.18)$$

Здесь  $\bar{a}_i^c$  и  $\underline{a}_i^c$  – границы<sup>4</sup> интервала  $A_i^c$ . Так как согласованность ограничений не зависит от функции  $\varphi$ , то ее выбор определяется прежде всего сложностью вычислений.

<sup>4</sup>Для упрощения предполагается, что  $A_i^c$  состоит из одного интервала.

Аналогичный вывод может быть сделан и для расчета нижней границы  $\underline{v}$ . В этом случае анализируется следующая задача оптимизации:

$$\underline{v} = \max_{c_0, c_i, d_i} \left( c_0 + \sum_{i=1}^m (c_i \underline{v}_i - d_i \bar{v}_i) \right) \quad (6.19)$$

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i \in J$ ,  $\forall J \subseteq N$ ,

$$c_0 + \sum_{i \in J} (c_i - d_i) \leq \begin{cases} 1, & \mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \cup \mathcal{A}_0^c \notin \mathcal{C} \\ 0, & \mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \cup \mathcal{A}_0^c \in \mathcal{C} \end{cases} \quad (6.20)$$

Если множество  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$  является несогласованным, то соответствующее неравенство

$$c_0 + \sum_{i \in J} (c_i - d_i) \leq 0 \text{ или } 1$$

исключается из списка всех возможных ограничений.

В итоге запишем алгоритм для вычисления  $\underline{v}$  и  $\bar{v}$ .

**Шаг 1.** Перебором значений всех двоичных векторов  $(y_1, \dots, y_m)$ ,  $y_i \in \{0, 1\}$ , формируются множества  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$  ограничений, где  $i \in J$ , если  $y_i = 1$ , и  $i \in N \setminus J$ , если  $y_i = 0$ .

**Шаг 2.** Выбирается очередное множество  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$  из списка, полученного на шаге 1.

**Шаг 3.** Если  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \in \mathcal{C}$ , то (6.16) используется для вычисления  $\bar{v}$  и (6.20) используется для вычисления  $\underline{v}$ . Если  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \notin \mathcal{C}$ , то переход на шаг 2.

**Шаг 4.** Системы ограничений, полученные на шаге 3, и целевые функции (6.10), (6.19) образуют задачи линейного программирования, решениями которых являются вероятности  $\bar{v}$  и  $\underline{v}$ .

#### 6.4. Вычисление “среднего” интервала (вторая задача)

Вторая задача вычисления ожидаемого или “усредненного” интервала  $[a_*, a^*] = [\underline{\mathbb{E}}g, \overline{\mathbb{E}}g]$  математического ожидания  $\mathbb{E}g(X)$  решается следующим образом. Алгоритм вычисления аналогичен рассмотренному в разделе 6.3. Фактически



в этом разделе было рассмотрено также вычисление “среднего”, но индикаторной функции  $I_A(X)$ . Поэтому несложно обобщить полученные результаты на произвольную функцию  $g(X)$ . Перепишем задачу (6.10)–(6.11) в виде

$$a^* = \min_{c_0, c_i, d_i} \left\{ c_0 + \sum_{i=1}^m (c_i \bar{v}_i - d_i \underline{v}_i) \right\} \quad (6.21)$$

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

$$c_0 + \sum_{i=1}^m (c_i - d_i) I_{A_i}(\mathbb{E}h_i) \geq \mathbb{E}g. \quad (6.22)$$

Пусть  $p^{(1)} \in \mathcal{R}_J$  и  $p^{(2)} \in \mathcal{R}_J$  – два распределения вероятностей, удовлетворяющих ограничениям  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$ , и

$$p^{(2)} \cdot \mathbf{g} \geq p^{(1)} \cdot \mathbf{g}.$$

Обозначим

$$\mathbb{E}^{(k)}h_i = p^{(k)} \cdot \mathbf{h}_i, \quad k = 1, 2.$$

Отсюда выполняется равенство  $I_{A_i}(\mathbb{E}^{(1)}h_i) = I_{A_i}(\mathbb{E}^{(2)}h_i)$ . Тогда ограничение

$$c_0 + \sum_{i \in J} (c_i - d_i) I_{A_i}(\mathbb{E}^{(1)}h_i) \geq \mathbb{E}^{(1)}g$$

следует из ограничения

$$c_0 + \sum_{i \in J} (c_i - d_i) I_{A_i}(\mathbb{E}^{(2)}h_i) \geq \mathbb{E}^{(2)}g$$

и может быть удалено из рассмотрения. Следовательно, ограничение (6.22) эквивалентно ограничению

$$c_0 + \sum_{i \in J} (c_i - d_i) I_{A_i}(\mathbb{E}h_i) \geq \max_{\mathcal{R}_J} \mathbb{E}g.$$

Здесь максимум определяется по всему множеству  $\mathcal{R}_J$  возможных распределений вероятностей  $p$ , удовлетворяющих

множеству согласованных ограничений  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$ . Отсюда следует, что правая часть ограничения заменяется верхней границей математического ожидания  $\overline{\mathbb{E}}_J g$  функции  $g$  при ограничениях  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$  и ограничение принимает вид

$$c_0 + \sum_{i \in J} (c_i - d_i) \geq \overline{\mathbb{E}}_J g. \quad (6.23)$$

Здесь верхняя граница является решением задачи линейного программирования

$$\overline{\mathbb{E}}_J g = \max_{\mathcal{R}} \sum_{x \in \Omega} g(x)p(x) \quad (6.24)$$

при ограничениях  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$ .

Аналогичный вывод может быть сделан для вычисления нижней границы  $a_*$ . При этом результатом вывода является задача оптимизации

$$a_* = \max_{c_0, c_i, d_i} \left\{ c_0 + \sum_{i=1}^m (c_i \underline{v}_i - d_i \overline{v}_i) \right\} \quad (6.25)$$

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

$$c_0 + \sum_{i=1}^m (c_i - d_i) I_{A_i}(\mathbb{E}h_i) \leq \min_{\mathcal{R}_J} \mathbb{E}g. \quad (6.26)$$

Здесь минимум определяется по всему множеству  $\mathcal{R}_J$  возможных распределений вероятностей  $p$ , удовлетворяющих множеству согласованных ограничений  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$ . Отсюда (6.26) заменяется следующим ограничением:

$$c_0 + \sum_{i \in J} (c_i - d_i) \leq \underline{\mathbb{E}}_J g. \quad (6.27)$$

Здесь

$$\underline{\mathbb{E}}_J g = \min_{\mathcal{R}_J} (p \cdot g) \quad (6.28)$$

при ограничениях  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$ .

В итоге запишем алгоритм для вычисления  $a_*$  и  $a^*$ .

**Шаг 1.** Перебором значений всех двоичных векторов  $(y_1, \dots, y_m)$ ,  $y_i \in \{0, 1\}$ , формируются множества  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$  ограничений, где  $i \in J$ , если  $y_i = 1$ , и  $i \in N \setminus J$ , если  $y_i = 0$ .

**Шаг 2.** Выбирается очередное множество  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$  из списка, полученного на шаге 1.

**Шаг 3.** Если  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \in \mathcal{C}$ , то (6.23) и (6.24) используются для вычисления  $a^*$ , (6.27) и (6.28) используются для вычисления  $a_*$ . Если  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \notin \mathcal{C}$ , то переход на шаг 2.

**Шаг 4.** Системы ограничений, полученные на шаге 3, и целевые функции (6.21) и (6.25) образуют задачи линейного программирования, решениями которых являются “средние”  $a^*$  и  $a_*$ .

## 6.5. Модификация вероятностей второго порядка (третья задача)

Предположим, что при наличии экспертных оценок (6.1) произошло событие. Однако вследствие неточности наблюдений можно говорить только об интервале  $B(x) = [\underline{b}, \bar{b}]$ , например, “число страховых случаев, наблюдаемых за заданный период времени, находится в пределах от 10 до 12”. Используя обобщенную теорему Байеса, можно найти апостериорные вероятности второго уровня  $\underline{\eta}_k$  и  $\bar{\eta}_k$  из имеющихся априорных  $\underline{v}_k$  и  $\bar{v}_k$  после наблюдения события  $B$ , т.е.

$$\Pr \{ \underline{a}_k \leq \mathbb{E}(h_k|B) \leq \bar{a}_k \} \in [\underline{\eta}_k, \bar{\eta}_k].$$

Условное математическое ожидание  $\mathbb{E}(h_k|B)$  вычисляется следующим образом [161, 126]:

$$\mathbb{E}(h_k|B) = \frac{\mathbb{E}h_k B}{\Pr(B)} = \frac{\sum_{x \in \Omega} h_k(x) B(x) p(x)}{\sum_{x \in \Omega} B(x) p(x)}.$$

Заметим, что после наблюдения события  $B$  интервал априорных оценок  $\underline{\mathbb{E}}h_k$ ,  $\bar{\mathbb{E}}h_k$  изменяется и апостериорные оценки имеют вид  $\underline{\mathbb{E}}(h_k|B)$  и  $\bar{\mathbb{E}}(h_k|B)$  соответственно. Отсюда следует, что вероятность того, что условное математическое ожидание  $\mathbb{E}(h_k|B)$  останется в тех же пределах  $[\underline{a}_k, \bar{a}_k]$ , должна быть изменена и ее новые границы равны  $\underline{\eta}_k$  и  $\bar{\eta}_k$ . Если вернуться к

$n$ -мерному единичному симплексу вероятностей  $p$ , то “пятна” на нем, образованные интервалами  $[\underline{a}_k, \bar{a}_k]$ , после наблюдения события  $B$  изменяются вместе с “горами” плотностей  $\psi$  над ними. Измененные “горы” дают новые вероятности  $\underline{\eta}_k$  и  $\bar{\eta}_k$  над старыми пятнами.

Процедура продолжения для вычисления верхней апостериорной вероятности  $\bar{\eta}_k = \bar{\mathbb{E}}I_{A_k}(\mathbb{E}(h_k|B))$  имеет вид:

$$\bar{\eta}_k = \min_{c_0, c_i, d_i} \left( c_0 + \sum_{i=1}^m (c_i \bar{v}_i - d_i \underline{v}_i) \right) \quad (6.29)$$

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\forall p \in \mathcal{P}$ ,

$$\begin{aligned} c_0 + \sum_{i=1}^m (c_i - d_i) I_{A_i}(p \cdot \mathbf{h}_i) &\geq \\ &\geq I_{A_k} \left( \frac{\sum_{x \in \Omega} h_k(x) B(x) p(x)}{\sum_{x \in \Omega} B(x) p(x)} \right). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Нижняя апостериорная вероятность  $\underline{\eta}_k = \underline{\mathbb{E}}I_{A_k}(\mathbb{E}(h_k|B))$  вычисляется аналогично

$$\underline{\eta}_k = \max_{c_0, c_i, d_i} \left( c_0 + \sum_{i=1}^m (c_i \underline{v}_i - d_i \bar{v}_i) \right) \quad (6.31)$$

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,

$$\begin{aligned} c_0 + \sum_{i=1}^m (c_i - d_i) I_{A_i}(p \cdot \mathbf{h}_i) &\leq \\ &\leq I_{A_k} \left( \frac{\sum_{x \in \Omega} h_k(x) B(x) p(x)}{\sum_{x \in \Omega} B(x) p(x)} \right). \end{aligned} \quad (6.32)$$

Здесь  $\mathcal{P}$  – множество всех распределений  $p$ .

Из записи задач (6.29)–(6.32) видно, что они отличаются от рассмотренных ранее задач оптимизации только правой частью в ограничениях. Поэтому основная часть их решения аналогична уже рассмотренным задачам в рамках моделей второго порядка. Для приведения задач (6.29)–(6.32) к более

простому виду необходимо определить согласованность различных событий. Обозначим  $\mathcal{B}_k = \{\underline{a}_k \leq \mathbb{E}(h_k|B) \leq \bar{a}_k\}$ . Используя результаты предыдущих разделов, можно записать следующее. Если  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \in \mathcal{C}$ , то (6.30) может быть переписана для любого  $J \subseteq N$  как

$$c_0 + \sum_{i \in J} (c_i - d_i) \geq \begin{cases} 1, & \mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \cup \mathcal{B}_k \in \mathcal{C} \\ 0, & \mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \cup \mathcal{B}_k \notin \mathcal{C} \end{cases} \quad (6.33)$$

Если  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \notin \mathcal{C}$ , то соответствующее неравенство

$$c_0 + \sum_{i \in J} (c_i - d_i) \geq 0 \text{ или } 1$$

исключается из списка ограничений.

Если  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \in \mathcal{C}$ , то ограничения для вычисления нижней границы  $\underline{\eta}_k$  переписываются аналогично

$$c_0 + \sum_{i \in J} (c_i - d_i) \leq \begin{cases} 1, & \mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \cup \mathcal{B}_k^c \notin \mathcal{C} \\ 0, & \mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \cup \mathcal{B}_k^c \in \mathcal{C} \end{cases} \quad (6.34)$$

Если  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \notin \mathcal{C}$ , то соответствующее неравенство

$$c_0 + \sum_{i \in J} (c_i - d_i) \leq 0 \text{ или } 1$$

исключается из списка ограничений.

Как определить в данном случае согласованность множеств  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \cup \mathcal{B}_k$  и  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \cup \mathcal{B}_k^c$ ? Это можно сделать, решая следующие задачи оптимизации:

$$\underline{b}_k(\bar{b}_k) = \min_p \left( \max_p \right) \frac{\sum_{x \in \Omega} h_k(x) B(x) p(x)}{\sum_{x \in \Omega} B(x) p(x)}$$

при ограничениях

$$p \cdot \mathbf{h}_i \in A_i, \quad i \in J, \quad p \cdot \mathbf{h}_j \in A_j^c, \quad j \in N \setminus J.$$

Приведенные задачи являются задачами дробно-линейного программирования. Они при помощи достаточно простых

преобразований сводятся к задачам линейного программирования.

Если после решения задач оптимизации выполняется условие  $[b_k, \bar{b}_k] \cap A_k \neq 0$ , то множество  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \cup \mathcal{B}_k$  является согласованным. Если выполняется условие  $[\underline{b}_k, \bar{b}_k] \cap A_k^c \neq 0$ , то множество  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \cup \mathcal{B}_k^c$  является согласованным.

В итоге запишем алгоритм для вычисления  $\underline{\eta}_k$  и  $\bar{\eta}_k$ .

**Шаг 1.** Перебором значений всех двоичных векторов  $(y_1, \dots, y_m)$ ,  $y_i \in \{0, 1\}$ , формируются множества  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$  ограничений, где  $i \in J$ , если  $y_i = 1$ , и  $i \in N \setminus J$ , если  $y_i = 0$ .

**Шаг 2.** Выбирается очередное множество  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$  из списка, полученного на шаге 1.

**Шаг 3.** Если  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \in \mathcal{C}$ , то (6.33) используется для вычисления  $\bar{\eta}_k$  и (6.34) используется для вычисления  $\underline{\eta}_k$ . Если  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \notin \mathcal{C}$ , то переход на шаг 2.

**Шаг 4.** Системы ограничений, полученные на шаге 3, и целевые функции (6.29) и (6.31) образуют задачи дробно-линейного программирования, решениями которых являются апостериорные вероятности  $\underline{\eta}_k$  и  $\bar{\eta}_k$ .

## 6.6. Числовые примеры

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий предлагаемую иерархическую модель второго порядка.

**Пример 6.4.** Предположим, что эксперт оценивает состояние системы (отказ – 1 и рабочее – 0) следующим образом: вероятность рабочего состояния находится в интервале от 0 до 0.1. Доверие к оценкам эксперта равно 0.6. Найдем степень доверия к оценке вероятности отказа  $[0, 0.2]$ . Формально имеющуюся информацию можно представить в виде:

$$\Pr(A_1) = \Pr\{0 \leq \mathbb{E}I_{\{0\}}(X) \leq 0.1\} = 0.6,$$

$$\Pr\{0 \leq \mathbb{E}I_{\{1\}}(X) \leq 0.2\} \in [\underline{v}, \bar{v}].$$

Здесь  $\Omega = \{0, 1\}$ . Отметим, что  $p(0) + p(1) = 1$  и

$$\sum_{x \in \{0,1\}} I_{\{0\}}(x)p(x) = p(0), \quad \sum_{x \in \{0,1\}} I_{\{1\}}(x)p(x) = p(1).$$

Тогда задача (6.10)–(6.11) имеет вид

$$\bar{v} = \min_{c_0, c, d} \{c_0 + 0.6(c - d)\}$$

при ограничениях  $c, d \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,

$$c_0 + (c - d) I_{[0,0.1]}(p(0)) \geq I_{[0,0.2]}(p(1)),$$

где  $\mathcal{A}_1 = \{0 \leq p(0) \leq 0.1\}$  и  $\mathcal{A} = \{0 \leq p(1) \leq 0.2\}$ .

Перебирая все возможные значения индикаторных функций, запишем множество из  $2^2$  ограничений:

$$\begin{aligned} c_0 + (c - d) \cdot 1 &\geq 1, \\ c_0 + (c - d) \cdot 1 &\geq 0, \\ c_0 + (c - d) \cdot 0 &\geq 1, \\ c_0 + (c - d) \cdot 0 &\geq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}$  являются несогласованными, так как если  $p(0) \in [0, 0.1]$ , то верно условие  $p(1) \in [0.9, 1]$ , а не условие  $p(1) \in [0, 0.2]$ . Другими словами, нельзя найти вероятности  $p(0)$  из интервала  $[0, 0.1]$  и  $p(1)$  из интервала  $[0.9, 1]$ , которые бы удовлетворяли условию  $p(0) + p(1) = 1$ , вследствие того что  $[0.9, 1] \cap [0, 0.2] = \emptyset$ . Отсюда следует, что ограничение  $c_0 + (c - d) \cdot 1 \geq 1$  должно быть исключено из списка ограничений.

$\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}^c$  являются несогласованными, так как в этом случае  $p(1) \in [0.2, 1]$  и существует по крайней мере такое одно распределение  $p$ , что  $p(0) \in [0, 0.1]$  и  $p(1) \in [0.2, 1]$ , например  $p(0) = 0.1$  и  $p(1) = 0.9$ . Отсюда следует, что второе ограничение остается в списке. Анализируя аналогичным образом согласованность множеств  $\mathcal{A}_1^c$  и  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}_1^c$  и  $\mathcal{A}^c$ , записываем итоговую систему ограничений:

$$\begin{aligned} c_0 + (c - d) \cdot 1 &\geq 0, \\ c_0 + (c - d) \cdot 0 &\geq 1, \\ c_0 + (c - d) \cdot 0 &\geq 0. \end{aligned}$$

Тогда задача оптимизации для вычисления  $\bar{v}$  имеет следующее решение:  $c_0 = 1$ ,  $c = 0$ ,  $d = 1$ . Отсюда  $\bar{v} = 0.4$ . Аналогично можно найти  $\underline{v} = 0$ . Таким образом, получаем  $\Pr\{0 \leq \mathbb{E}I_{\{1\}}(x) \leq 0.2\} \in [0, 0.4]$ .

Далее рассмотрим более сложный пример и решим все три задачи, соответствующие иерархической модели второго порядка.

Таблица 6.1. Согласованность множеств ограничений

Множества	Согласованность
$\mathcal{A}_{\{1,2,3\}}$	нет
$\mathcal{A}_{\{1\}}^c \cup \mathcal{A}_{\{2,3\}}$	нет
$\mathcal{A}_{\{2\}}^c \cup \mathcal{A}_{\{1,3\}}$	да
$\mathcal{A}_{\{3\}}^c \cup \mathcal{A}_{\{1,2\}}$	да
$\mathcal{A}_{\{1,2\}}^c \cup \mathcal{A}_{\{3\}}$	нет
$\mathcal{A}_{\{1,3\}}^c \cup \mathcal{A}_{\{2\}}$	да
$\mathcal{A}_{\{2,3\}}^c \cup \mathcal{A}_{\{1\}}$	да
$\mathcal{A}_{\{1,2,3\}}^c$	да

**Пример 6.5.** Предположим, что три эксперта страховой компании оценивают вероятностные характеристики страховых случаев следующим образом:

- 1) вероятность того, что число страховых случаев в заданный период времени будет не больше 10, меньше 0.4;
- 2) вероятность того, что число страховых случаев в заданный период времени будет не больше 8, меньше 0.2;
- 3) среднее число страховых случаев между 0 и 2.

Доверие к оценкам первого и второго экспертов соответственно 0.4 и 0.7. Доверие к оценкам третьего эксперта находится в интервале от 0.2 до 0.5. Найдем нижнюю  $\underline{\nu}$  и верхнюю  $\bar{\nu}$  границы доверия к тому, что вероятность от 10 до 12 страховых случаев не меньше 0.7.

Оценки экспертов могут быть формально представлены в следующем виде:

$$\Pr(A_1) = \Pr\{0 \leq \mathbb{E}I_{\{0, \dots, 10\}}(X) \leq 0.4\} = 0.4,$$

$$\Pr(A_2) = \Pr\{0 \leq \mathbb{E}I_{\{0, \dots, 8\}}(X) \leq 0.2\} = 0.7,$$

$$\Pr(A_3) = \Pr\{0 \leq \mathbb{E}X \leq 2\} \in [0.2, 0.5],$$

$$\Pr\{0.7 \leq \mathbb{E}I_{\{10, 11, 12\}}(X) \leq 1\} = [\underline{\nu}, \bar{\nu}].$$

Согласованность множеств  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$  показана в табл. 6.1.

Множества  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \cup \mathcal{A}_0^c$  являются согласованными для всех  $J \subseteq \{1, 2, 3\}$ , соответствующих согласованным множествам  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$ . Только два множества ограничений  $\mathcal{A}_{\{3\}}^c \cup \mathcal{A}_{\{1,2\}} \cup \mathcal{A}_0$



и  $\mathcal{A}_{\{2,3\}}^c \cup \mathcal{A}_{\{1\}} \cup \mathcal{A}_0$  из всех множеств вида  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \cup \mathcal{A}_0$  являются согласованными. Поэтому задача линейного программирования для вычисления  $\bar{v}$  имеет вид:

$$\bar{v} = \min_{c_0, c_i, d_i} \{c_0 + 0.4(c_1 - d_1) + 0.7(c_2 - d_2) + 0.5c_3 - 0.2d_3\}$$

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned} c_0 + (c_1 - d_1) + (c_3 - d_3) &\geq 0, \\ c_0 + (c_1 - d_1) + (c_2 - d_2) &\geq 1, \\ c_0 + (c_2 - d_2) &\geq 0, \\ c_0 + (c_1 - d_1) &\geq 1, \\ c_0 &\geq 0. \end{aligned}$$

Оптимальное решение:

$$c_1 = d_3 = 1, \quad c_0 = d_1 = c_2 = c_3 = d_2 = 0.$$

Отсюда  $\bar{v} = 0.2$ . Аналогично можно получить нижнюю границу  $\underline{v} = 0$ .

Найдем “средний” интервал  $[a_*, a^*]$  вероятности  $\mathbb{E}I_{\{10,11,12\}}(X)$ . Согласно алгоритму, представленному в разделе 6.4, можно записать (см. табл. 6.2) следующую задачу линейного программирования для вычисления верхней границы  $a^*$ :

$$a^* = \min_{c_0, c_i, d_i} \{c_0 + 0.4(c_1 - d_1) + 0.7(c_2 - d_2) + 0.5c_3 - 0.2d_3\}$$

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned} c_0 + (c_1 - d_1) + (c_3 - d_3) &\geq 0.2, \\ c_0 + (c_1 - d_1) + (c_2 - d_2) &\geq 1, \\ c_0 + (c_2 - d_2) &\geq 0.6, \\ c_0 + (c_1 - d_1) &\geq 0.8, \\ c_0 &\geq 0.4. \end{aligned}$$

Оптимальное решение:

$$c_0 = c_1 = 0.4, \quad c_2 = 0.2, \quad d_3 = 0.6, \quad d_1 = d_2 = c_3 = 0.$$

Отсюда  $a^* = 0.58$ . Очевидно также (см. табл. 6.2), что  $a_* = 0$ .

Предположим, что наблюдатель не может точно сказать был ли страховой случай или нет, т.е. формально наблюдаемое событие можно рассматривать как  $B = \{0, 1\}$ . Пересчитаем степень доверия

Таблица 6.2. Нижняя и верхняя границы вероятности того, что число страховых случаев находится в интервале от 10 до 12

Множества	$\underline{\mathbb{E}}I_{\{10,11,12\}}(X)$	$\overline{\mathbb{E}}I_{\{10,11,12\}}(X)$
$\mathcal{A}_{\{2\}}^c \cup \mathcal{A}_{\{1,3\}}$	0	0.2
$\mathcal{A}_{\{3\}}^c \cup \mathcal{A}_{\{1,2\}}$	0	1
$\mathcal{A}_{\{1,3\}}^c \cup \mathcal{A}_{\{2\}}$	0	0.6
$\mathcal{A}_{\{2,3\}}^c \cup \mathcal{A}_{\{1\}}$	0	0.8
$\mathcal{A}_{\{1,2,3\}}^c$	0	0.4

к оценке третьего эксперта исходя из того, что произошло событие  $B$ . Все множества  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \cup \mathcal{B}$  являются согласованными. Из всех множеств вида  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J \cup \mathcal{B}^c$  только множество  $\mathcal{A}_{\{2,3\}}^c \cup \mathcal{A}_{\{1\}} \cup \mathcal{B}^c$  является согласованным. Поэтому задача оптимизации для вычисления  $\eta_3$  имеет вид:

$$\underline{\eta}_3 = \max_{c_0, c_i, d_i} \{c_0 + 0.4(c_1 - d_1) + 0.7(c_2 - d_2) + 0.2c_3 - 0.5d_3\}$$

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned} c_0 + (c_1 - d_1) + (c_3 - d_3) &\leq 1, \\ c_0 + (c_1 - d_1) + (c_2 - d_2) &\leq 1, \\ c_0 + (c_2 - d_2) &\leq 1, \\ c_0 + (c_1 - d_1) &\leq 0, \\ c_0 &\leq 1. \end{aligned}$$

Оптимальное решение:  $c_2 = c_3 = 1$ ,  $c_0 = c_1 = d_1 = d_2 = d_3 = 0$ . Отсюда  $\underline{\eta}_3 = 0.9$ . Очевидно, что  $\bar{\eta}_3 = 1$ .

## 6.7. Определение вероятностей второго уровня

В предыдущих разделах предполагалось, что вероятности оценок известны. Однако во многих случаях их определение наталкивается на значительные трудности. Кроме того, вероятности оценок зависят не только от степени качества экспертов, но и от самих оценок.

Вернемся к оценкам первого уровня иерархической модели

$$\underline{a}_k = \underline{\mathbb{E}}h_k \leq \mathbb{E}h_k = \sum_{i=1}^L h_k(x_i)p(x_i) \leq \overline{\mathbb{E}}h_k = \bar{a}_k, \quad (6.35)$$

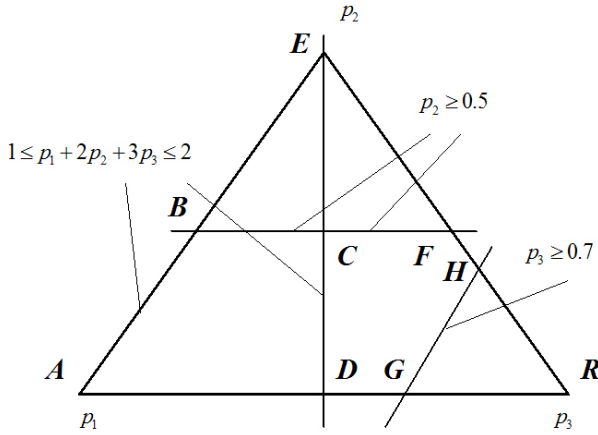


Рис. 6.1. Иллюстрация к примеру 6.6

$k = 1, \dots, N$ , и рассмотрим единичный симплекс вероятностей  $S(1, L)$ . Каждая  $k$ -я оценка (6.35) образует на этом симплексе некоторое выпуклое подмножество распределений вероятностей, которое обозначим  $\mathcal{M}_k$ .

**Пример 6.6.** Получены три ( $N = 3$ ) оценки  $p_3 \geq 0.7$ ,  $p_2 \geq 0.5$ ,  $1 \leq \mathbb{E}X \leq 2$  значений дискретной величины  $X$ , принимающей три значения ( $L = 3$ ) с неизвестными вероятностями  $p = (p_1, p_2, p_3)$ . Эти оценки образуют подмножества  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$ ,  $\mathcal{M}_3$  распределений вероятностей, показанные на рис. 6.1 в виде треугольников  $GHR$ ,  $BEF$ ,  $AED$  соответственно.

Если рассматривать все множество распределений  $\mathcal{M}$  как универсальное множество, а подмножества  $\mathcal{M}_k$  как некоторые события, то для анализа вероятностей попадания в любое подмножество  $\mathcal{L}$ , образованное оценкой  $\underline{\mathbb{E}}g \leq \mathbb{E}g \leq \overline{\mathbb{E}}g$ , можно использовать аппарат теории случайных множеств или теории Демпстера–Шейфера. Тогда нижняя и верхняя вероятности подмножества  $\mathcal{L}$  являются функциями доверия и правдоподобия, т.е.

$$\underline{P}(\mathcal{L}) = \text{Bel}(\mathcal{L}) = \frac{1}{N} \sum_{i: \mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{L}} 1,$$

$$\bar{P}(\mathcal{L}) = \text{Pl}(\mathcal{L}) = \frac{1}{N} \sum_{i: \mathcal{M}_i \cap \mathcal{L} \neq \emptyset} 1.$$

Другими словами, нижняя вероятность равна относительно-му числу оценок, которые образуют множества вероятностей, входящих в  $\mathcal{L}$ . Верхняя вероятность равна относительно-му числу оценок, которые образуют множества вероятностей, имеющие хотя бы одно общее с  $\mathcal{L}$  распределение.

Так как количество экспертных оценок может быть крайне малым, то целесообразно использовать обобщенную модель Дирихле с параметром осторожности  $s > 0$  для расширения функций доверия и правдоподобия. В этом случае расширенные границы вероятности имеют вид<sup>5</sup>

$$\underline{P}(\mathcal{L}|s) = \frac{N \cdot \text{Bel}(\mathcal{L})}{N + s} = \frac{1}{N + s} \sum_{i: \mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{L}} 1,$$

$$\bar{P}(\mathcal{L}|s) = \frac{N \cdot \text{Pl}(\mathcal{L}) + s}{N + s} = \frac{1}{N + s} \left( s + \sum_{i: \mathcal{M}_i \cap \mathcal{L} \neq \emptyset} 1 \right).$$

Если  $s = 0$ , то  $\underline{P}(\mathcal{L}|0) = \text{Bel}(\mathcal{L})$ ,  $\bar{P}(\mathcal{L}|0) = \text{Pl}(\mathcal{L})$ . Кроме того, верхнюю вероятность можно записать в другом виде:

$$\bar{P}(\mathcal{L}|s) = \frac{1}{N + s} \left( s + N - \sum_{i: \mathcal{M}_i \cap \mathcal{L} = \emptyset} 1 \right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{N + s} \sum_{i: \mathcal{M}_i \cap \mathcal{L} = \emptyset} 1.$$

**Пример 6.7.** Найдем вероятности оценок, приведенных в примере 6.6. Из рис. 6.1 видно, что  $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_2$ ,  $\mathcal{M}_3 \subseteq \mathcal{M}_3$ ,  $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$ ,  $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_3 = \emptyset$ . Следовательно, принимая поочередно условие  $\mathcal{L} = \mathcal{M}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , можно записать:

$$\underline{P}(\mathcal{M}_1|s) = \frac{1}{3 + s}, \quad \bar{P}(\mathcal{M}_1|s) = \frac{1 + s}{3 + s},$$

---

<sup>5</sup>Необходимо отметить, что границы вероятностей могут быть также получены с использованием урновой схемы на основе рассмотрения множества стандартных полиномиальных моделей аналогично тому, как это сделано в разделе 5.5. Подробное описание этого подхода можно найти в работе [115].

$$\begin{aligned}\underline{P}(\mathcal{M}_2|s) &= \frac{1}{3+s}, & \overline{P}(\mathcal{M}_2|s) &= \frac{2+s}{3+s}, \\ \underline{P}(\mathcal{M}_3|s) &= \frac{1}{3+s}, & \overline{P}(\mathcal{M}_3|s) &= \frac{2+s}{3+s}.\end{aligned}$$

Например, при  $s = 1$  получаем

$$\begin{aligned}\underline{P}(\mathcal{M}_1|s) &= \frac{1}{4}, & \overline{P}(\mathcal{M}_1|s) &= \frac{1}{2}, \\ \underline{P}(\mathcal{M}_2|s) &= \underline{P}(\mathcal{M}_3|s) = \frac{1}{4}, & \overline{P}(\mathcal{M}_2|s) &= \overline{P}(\mathcal{M}_3|s) = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Приведенный пример являлся иллюстрационным и для него было достаточно просто определить, как подмножества соотносятся или как выполняются условия  $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{L}$  или  $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{L} = \emptyset$ . Однако в общем случае для определения этих условий необходимо разработать эффективный алгоритм, который рассмотрен ниже.

Пусть  $\underline{c} = \inf_{\mathcal{M}_i} \mathbb{E}g$ ,  $\overline{c} = \sup_{\mathcal{M}_i} \mathbb{E}g$ ,  $\underline{d} = \inf_{\mathcal{L}} \mathbb{E}g$ ,  $\overline{d} = \sup_{\mathcal{L}} \mathbb{E}g$ , где  $g$  – произвольная функция. Тогда можно доказать, что  $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{L}$ , если  $[\underline{c}, \overline{c}] \subseteq [\underline{d}, \overline{d}]$ . Действительно, если при оптимизации по всем распределениям из  $\mathcal{L}$  нижняя граница математического ожидания  $\mathbb{E}g$  достигается при некотором распределении из  $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{L}$ , то  $\underline{c} = \underline{d}$ . Если эта нижняя граница достигается при некотором распределении из  $\mathcal{L} \setminus \mathcal{M}_i$ , то  $\underline{c} \geq \underline{d}$ . Аналогичный вывод можно сделать для верхних границ.

Таким образом, для проверки условия  $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{L}$ , где  $\mathcal{L}$  образовано оценкой  $\underline{\mathbb{E}g} \leq \mathbb{E}g \leq \overline{\mathbb{E}g}$ , необходимо продолжить границы  $\underline{\mathbb{E}h}_i$  и  $\overline{\mathbb{E}h}_i$  на границы  $\underline{c}$  и  $\overline{c}$  математического ожидания функции  $g$  при помощи процедуры продолжения [161, 131, 138]

$$\underline{c} = \inf_{p \in S(1, L)} \mathbb{E}g, \quad \overline{c} = \sup_{p \in S(1, L)} \mathbb{E}g$$

при ограничении  $\underline{\mathbb{E}h}_i \leq \mathbb{E}h_i \leq \overline{\mathbb{E}h}_i$ .

Двойственные задачи линейного программирования имеют вид

$$\underline{c} = \sup (c_0 + c_1 \underline{\mathbb{E}h}_i - d_1 \overline{\mathbb{E}h}_i)$$

при ограничениях  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $c_1, d_1 \in \mathbb{R}_+$ ,  $\forall x_j, j = 1, \dots, L$ ,

$$c_0 + c_1 h_i(x_j) - d_1 h_i(x_j) \leq g(x_j),$$

и

$$\bar{c} = \inf (c_0 + c_1 \bar{\mathbb{E}}h_i - d_1 \underline{\mathbb{E}}h_i)$$

при ограничениях  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $c_1, d_1 \in \mathbb{R}_+$ ,  $\forall x_j, j = 1, \dots, L$ ,

$$c_0 + c_1 h_i(x_j) - d_1 h_i(x_j) \geq g(x_j).$$

Второе условие ( $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{L} = \emptyset$ ) проверяется также при помощи задачи линейного программирования. Очевидно, что если два ограничения образуют непересекающиеся множества распределений вероятностей, то задача оптимизации с этими ограничениями не имеет решения. Таким образом, формально можно записать правило проверки условия  $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{L} = \emptyset$  или условия  $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$ . Если задача линейного программирования с произвольной целевой функцией и ограничениями

$$\underline{\mathbb{E}}h_i \leq \mathbb{E}h_i \leq \bar{\mathbb{E}}h_i,$$

$$\underline{\mathbb{E}}g \leq \mathbb{E}g \leq \bar{\mathbb{E}}g$$

не имеет решения, то  $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{L} = \emptyset$ . И наоборот, если эта задача имеет решение, то  $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$ .

**Пример 6.8.** Проверим условие  $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_3 = \mathcal{L}$  в примере 6.6. Здесь  $[\underline{\mathbb{E}}g, \bar{\mathbb{E}}g] = [\underline{\mathbb{E}}h_3, \bar{\mathbb{E}}h_3] = [1, 2]$ ,  $[\underline{\mathbb{E}}h_2, \bar{\mathbb{E}}h_2] = [0.5, 1]$  и

$$\underline{c} = \inf_{p \in S(1,3)} (1p_1 + 2p_2 + 3p_3),$$

$$\bar{c} = \sup_{p \in S(1,3)} (1p_1 + 2p_2 + 3p_3)$$

при ограничениях  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$  и

$$0 \leq p_1 \leq 1, 0 \leq p_2 \leq 1, 0.5 \leq p_3 \leq 1.$$

Отсюда  $\underline{c} = 2$  и  $\bar{c} = 3$ . Следовательно, условие  $[2, 3] \subseteq [1, 2]$  не выполняется и  $\mathcal{M}_2 \not\subseteq \mathcal{M}_3$ . Это соответствует тому, что изображено на рис. 6.1.

Таким образом, получены границы для вероятностей оценок на втором уровне иерархической модели. Особенности этих вероятностей заключаются в том, что они получены активно только на основе имеющихся оценок.

**Пример 6.9.** Скорректируем границы для вероятности  $p_3$ , используя оценки, приведенные в примере 6.6, принимая во внимание тот факт, что при  $s = 1$  имеем вероятности второго уровня (см. также пример 6.7)  $\underline{P}(\mathcal{M}_1|1) = 1/4$ ,  $\overline{P}(\mathcal{M}_1|1) = 1/2$ ,  $\underline{P}(\mathcal{M}_2|1) = 1/4$ ,  $\overline{P}(\mathcal{M}_2|1) = 3/4$ ,  $\underline{P}(\mathcal{M}_3|1) = 1/4$ ,  $\overline{P}(\mathcal{M}_3|1) = 3/4$ .

Для решения используем алгоритм, представленный в разделе 6.3. Пусть  $J = \{1, 2, 3\}$ . Тогда

$$\min_{\mathcal{R}_J} \mathbb{E}g = \min_p p_3, \quad \max_{\mathcal{R}_J} \mathbb{E}g = \max_p p_3$$

при ограничениях  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$  и

$$\begin{aligned} 0.5 \leq p_2 \leq 1, \quad 0.7 \leq p_3 \leq 1, \\ 1 \leq 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 \leq 2. \end{aligned}$$

Задача не имеет решения и  $\mathcal{R}_{\{1,2,3\}} = \emptyset$ . Задачи линейного программирования для различных множеств  $J$  имеют одинаковые целевые функции  $p_3$ . Ограничения к ним и решения представлены в табл. 6.3.

Подставляя полученные результаты в (6.25)–(6.26), запишем:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{E}}g = \max_{c_0, c_i, d_i} \{c_0 + 0.25c_1 - 0.5d_1 + 0.25c_2 - \\ - 0.75d_2 + 0.25c_3 - 0.75d_3\} \end{aligned}$$

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned} c_0 + (c_2 - d_2) + (c_3 - d_3) &\leq 0, \\ c_0 + (c_1 - d_1) &\leq 0.7, \\ c_0 + (c_2 - d_2) &\leq 0, \\ c_0 + (c_3 - d_3) &\leq 0, \\ c_0 &\leq 0.25. \end{aligned}$$

Отсюда  $\underline{\mathbb{E}}g = 0.175$ . Верхняя граница для  $p_3$  может быть найдена как решение следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}}g = \min_{c_0, c_i, d_i} \{c_0 + 0.5c_1 - 0.25d_1 + 0.75c_2 - \\ - 0.25d_2 + 0.75c_3 - 0.25d_3\} \end{aligned}$$

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned} c_0 + (c_2 - d_2) + (c_3 - d_3) &\geq 0.25, \\ c_0 + (c_1 - d_1) &\geq 1, \\ c_0 + (c_2 - d_2) &\geq 0.5, \\ c_0 + (c_3 - d_3) &\geq 0.5, \\ c_0 &\geq 0.7. \end{aligned}$$

Таблица 6.3. Ограничения для различных множеств  $J$

$J$	Ограничения	$\mathcal{R}_J$	$\min_{\mathcal{R}_J} \mathbb{E}g$	$\max_{\mathcal{R}_J} \mathbb{E}g$
$\{1, 2\}$	$0.5 \leq p_2 \leq 1$ $0.7 \leq p_3 \leq 1$ $2 \leq 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 \leq 3$	$\emptyset$		
$\{2, 3\}$	$0.5 \leq p_2 \leq 1$ $0 \leq p_3 \leq 0.7$ $1 \leq 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 \leq 2$		0	0.25
$\{1, 3\}$	$0 \leq p_2 \leq 0.5$ $0.7 \leq p_3 \leq 1$ $1 \leq 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 \leq 2$	$\emptyset$		
$\{1\}$	$0 \leq p_2 \leq 0.5$ $0.7 \leq p_3 \leq 1$ $2 \leq 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 \leq 3$		0.7	1
$\{2\}$	$0.5 \leq p_2 \leq 1$ $0 \leq p_3 \leq 0.7$ $2 \leq 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 \leq 3$		0	0.5
$\{3\}$	$0 \leq p_2 \leq 0.5$ $0 \leq p_3 \leq 0.7$ $1 \leq 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 \leq 2$		0	0.5
$\{\emptyset\}$	$0 \leq p_2 \leq 0.5$ $0 \leq p_3 \leq 0.7$ $2 \leq 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 \leq 3$		0.25	0.7

Отсюда  $\bar{\mathbb{E}}g = 0.75$ . Таким образом, скорректированные границы вероятности  $p_3 - [0.175, 0.75]$ .

Почему новые границы совершенно отличаются от исходных границ ( $[0.7, 1]$ )? Главная причина заключается в том, что первая экспертная оценка, касающаяся вероятности  $p_3$ , находится в противоречии со второй и третьей оценками. Факт противоречия отражается в достаточно небольшой вероятности второго уровня ( $[0.25, 0.5]$ ) для первой оценки. Используя вероятность второго уровня иерархической модели, можно утверждать, что “дополнение” ( $A_1^c$ ) к первой оценке  $p_3 \in [0, 0.7]$  имеет большую интервальную вероятность второго уровня  $[0.5, 0.75]$ .

Необходимо отметить, что оценка  $p_3 \in [0, 0.7]$  не противоречит второй и третьей экспертным оценкам. Отсюда следует, что наибольшая часть распределения вероятностей второго уровня и соответствующее математическое ожидание сосредоточены в области



от 0 до 0.7. Поэтому скорректированные границы так существенно отличаются от исходной оценки.

Также следует отметить, что данное заключение сделано на основе анализа трех исходных оценок. Предположим теперь, что есть 15 оценок, идентичных первой, т.е. всего имеется 17 оценок (15 оценок образуют одно и то же подмножество вероятностей  $\mathcal{M}_1$ ). Тогда  $\underline{P}(\mathcal{M}_1|1) = 15/18$ ,  $\overline{P}(\mathcal{M}_1|1) = 16/18$ ,  $\underline{P}(\mathcal{M}_2|1) = 1/18$ ,  $\overline{P}(\mathcal{M}_2|1) = 3/18$ ,  $\underline{P}(\mathcal{M}_3|1) = 1/18$ ,  $\overline{P}(\mathcal{M}_3|1) = 3/18$ . Отсюда получаем  $\underline{E}g = 0.583$ ,  $\overline{E}g = 0.944$ , т.е.  $p_3 \in [0.583, 0.944]$ . Можно увидеть из полученных результатов, что новые оценки, поддерживающие первую оценку, приводят к увеличению интервальной вероятности  $p_3$ .

**Пример 6.10.** Вернемся к исходным данным примера 6.5 об оценках вероятности страховых случаев. Будем считать, что есть только экспертные оценки без учета их вероятностей второго рода, которые были даны и использовались в примере 6.5. Найдем “средний” интервал  $[a_*, a^*]$  вероятности  $\mathbb{E}I_{\{10,11,12\}}(X)$ , используя только имеющиеся оценки.

Линейные ограничения, соответствующие оценкам, имеют вид:

$$\begin{cases} 0 \leq \sum_{i=0}^{\infty} I_{\{0,\dots,10\}}(i)p_i \leq 0.4, \\ 0 \leq \sum_{i=0}^{\infty} I_{\{0,\dots,8\}}(i)p_i \leq 0.2, \\ 0 \leq \sum_{i=0}^{\infty} ip_i \leq 2, \\ \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1. \end{cases} \quad (6.36)$$

Пусть  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$  – подмножества распределений вероятностей, образованные этими оценками. Решая ряд задач линейного программирования для определения того, как эти множества соотносятся друг с другом, можно показать, что  $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_3 = \emptyset$ ,  $\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3 = \emptyset$ ,  $\mathcal{M}_i \subsetneq \mathcal{M}_j$ , для таких  $i = 1, 2, 3$  и  $j = 1, 2, 3$ , что  $i \neq j$ . Отсюда следует, что при  $s = 1$  нижние и верхние границы вероятностей второго уровня равны

$$\begin{aligned} \underline{P}(\mathcal{M}_1|1) &= 1/4, & \overline{P}(\mathcal{M}_1|1) &= 3/4, \\ \underline{P}(\mathcal{M}_2|1) &= 1/4, & \overline{P}(\mathcal{M}_2|1) &= 3/4, \\ \underline{P}(\mathcal{M}_3|1) &= 1/4, & \overline{P}(\mathcal{M}_3|1) &= 2/4. \end{aligned}$$

Следует отметить, что все задачи линейного программирования решались приближенно с ограничением на максимально возможное число страховых случаев равным 100.

Далее используем алгоритм, приведенный в разделе 6.4 и в примере 6.5. Все случаи согласованных множеств показаны в табл. 6.2.

Используя полученные вероятности второго уровня, запишем задачу оптимизации для вычисления верхней границы вероятности того, что число страховых случаев будет находиться в пределах от 10 до 12:

$$\min_{c_0, c_i, d_i} \left\{ c_0 + \frac{3}{4}c_1 - \frac{1}{4}d_1 + \frac{3}{4}c_2 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{2}{4}c_3 - \frac{1}{4}d_3 \right\}$$

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned} c_0 + (c_3 - d_3) &\geq 0.2, \\ c_0 + (c_1 - d_1) + (c_2 - d_2) &\geq 1, \\ c_0 + (c_2 - d_2) &\geq 0.6, \\ c_0 + (c_1 - d_1) &\geq 0.8, \\ c_0 &\geq 0.4. \end{aligned}$$

Оптимальное решение:  $d_1 = c_3 = d_2 = 0$ ,  $c_0 = 0.4$ ,  $c_1 = 0.4$ ,  $c_2 = 0.2$ ,  $d_3 = 0.2$ . Отсюда  $\overline{\mathbb{E}}E_{I_{\{10,11,12\}}}(X) = 0.8$ . Нижняя граница равна 0. Результаты расчетов показывают, что интервал искомой вероятности слишком широкий и неинформативный. Это является следствием, во-первых, недостатка исходной информации и, во-вторых, большой степенью противоречивости экспертных оценок. В то же время пример показывает, что даже при такой ограниченной информации можно не только получить какие-либо новые оценки, но и определить степень доверия к ним, вычисляя вероятности второго уровня соответствующей новой оценки.

Предположим, что дополнительно 10 экспертов подтвердили третью оценку. Тогда границы вероятностей оценок равны

$$\begin{aligned} \underline{P}(\mathcal{M}_1|1) &= 1/14, \quad \overline{P}(\mathcal{M}_1|1) = 3/14, \\ \underline{P}(\mathcal{M}_2|1) &= 1/14, \quad \overline{P}(\mathcal{M}_2|1) = 3/14, \\ \underline{P}(\mathcal{M}_3|1) &= 11/14, \quad \overline{P}(\mathcal{M}_3|1) = 12/14. \end{aligned}$$

Отсюда  $\overline{\mathbb{E}}E_{I_{\{10,11,12\}}}(X) = 0.37$ ,  $\mathbb{E}E_{I_{\{10,11,12\}}}(X) = 0$ . Интервал искомой вероятности в рассматриваемом случае значительно уменьшился.

## 6.8. Иерархические модели при известном типе распределения

Предположим, что случайная величина  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  имеет плотность вероятности  $\pi(x|\Theta)$ , где  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$  – вектор

$k$  параметров. Здесь рассматриваются непрерывные случайные величины, так как в рамках предлагаемых ниже моделей работа с такими величинами значительно проще.

Информация о случайной величине  $X$  представлена в следующем виде:

$$\underline{p}_i \leq \mathbb{E}_{\pi(x|\Theta)} f_i(X) \leq \bar{p}_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.37)$$

или

$$\underline{p}_i \leq \int_{\mathbb{R}} f_i(x) \pi(x|\Theta) dx \leq \bar{p}_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.38)$$

Это означает, что известны нижние и верхние границы математического ожидания некоторой функции  $f_i(X)$ . При этом количество таких оценок равно  $m$ . Формализуя исходную информацию в виде (6.37), предполагается, что существует множество возможных плотностей вероятности  $\pi$ , удовлетворяющих (6.37). В то же время известен тип плотности вероятности, например экспоненциальный, но параметры остаются неизвестными.

Предположим, что также имеется некоторая дополнительная информация о параметрах  $\Theta$  распределения вероятностей случайной величины  $X$  в следующем виде:

$$\underline{\alpha}_j \leq \mathbb{E}_{\rho(\Theta)} h_j(\Theta) \leq \bar{\alpha}_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (6.39)$$

или

$$\underline{\alpha}_j \leq \int_{\Lambda} h_j(\Theta) \rho(\Theta) d\Theta \leq \bar{\alpha}_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.40)$$

Здесь  $\rho$  – неизвестная совместная плотность вероятности вектора  $\Theta$ , удовлетворяющая ограничениям (6.39), и  $\Lambda$  – множество значений вектора  $\Theta$ , в частности  $\Lambda = \mathbb{R}^k$ . Это означает, что имеется  $n$  граничных условий для математического ожидания различных функций параметров  $\Theta$ . Если параметры статистически независимы, то совместная плотность представляется в виде произведения маргинальных плотностей, что является дополнительным условием в задачах оптимизации.

Как найти границы математического ожидания некоторой функции  $g(X)$ , т.е.  $\underline{\mathbb{E}}_{\pi} g$  и  $\bar{\mathbb{E}}_{\pi} g$ ? Ниже такие очевидные ограничения для плотностей  $\rho$  или  $\pi$ , как  $\rho(x) \geq 0$ ,

$\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1$  не будут записываться. Более того, интегралы вида  $\int_{\mathbb{R}} g(x)\pi(x|\Theta)dx$  и  $\int_{\Lambda} g(\Theta)\rho(\Theta)d\Theta$  будут обозначаться в терминах математических ожиданий  $\mathbb{E}_{\pi(x|\Theta)}g$  и  $\mathbb{E}_{\rho(\Theta)}g$  соответственно.

### 6.8.1. Решение задачи для первого частного случая

Рассмотрим случай, когда  $n = 0$ , т.е. имеющаяся информация представляется только в виде оценок (6.37). Один из возможных путей решения задачи вычисления границ  $\mathbb{E}_{\pi}g$  заключается в следующем. Оценка с номером  $i$  в (6.37) образует множество  $\Psi_i$  возможных значений параметров. Отсюда следует, что все оценки экспертов образуют множество значений  $\Psi = \bigcap_{i=1}^n \Psi_i$ , удовлетворяющее всем ограничениям. Используя множество  $\Psi$ , можно найти нижнюю и верхнюю границы математического ожидания  $\mathbb{E}_{\pi}g$  функции  $g$ . Формально задача записывается в виде:

$$\mathbb{E}_{\pi}g = \min_{\Theta \in \Psi} \mathbb{E}_{\pi(x|\Theta)}g(x), \quad \bar{\mathbb{E}}_{\pi}g = \max_{\Theta \in \Psi} \mathbb{E}_{\pi(x|\Theta)}g(x). \quad (6.41)$$

Максимум и минимум определяются по множеству всех значений параметров из  $\Psi$ , принадлежащих одновременно всем подмножествам  $\Psi_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

**Пример 6.11.** Имеется следующая информация о случайной величине  $X$ :

$$0.1 \leq \Pr\{X \in [0, 10]\} \leq 0.2, \quad (6.42)$$

$$0.3 \leq \Pr\{X \in [0, 20]\} \leq 0.5. \quad (6.43)$$

Найдем вероятность  $\Pr\{X \geq 30\}$  при условии, что  $X$  имеет экспоненциальное распределение с неизвестным параметром  $\lambda$ . Прежде всего определим возможные подмножества параметра  $\lambda$ , образованные оценками (6.42)–(6.43):

$$0.1 \leq 1 - \exp(-10 \cdot \lambda) \leq 0.2, \quad 0.3 \leq 1 - \exp(-20 \cdot \lambda) \leq 0.5.$$

Отсюда  $\Psi_1 = [0.0105, 0.0223]$ ,  $\Psi_2 = [0.0178, 0.0346]$ . Тогда

$$\Psi = \Psi_1 \cap \Psi_2 = [0.0178, 0.0223].$$

Так как функция

$$\mathbb{E}_{\pi}I_{[30, \infty)}(x) = \Pr\{X \geq 30\} = \exp(-30 \cdot \lambda)$$

является монотонной (убывающей) по параметру  $\lambda$ , то

$$\begin{aligned}\underline{\mathbb{E}}_{\pi} I_{[30, \infty)}(x) &= \exp(-30 \cdot 0.0223) = 0.512, \\ \bar{\mathbb{E}}_{\pi} I_{[30, \infty)}(x) &= \exp(-30 \cdot 0.0178) = 0.586.\end{aligned}$$

Интересно отметить, что в случае неизвестного распределения вероятностей величины  $X$  границы искомой вероятности имели бы значения  $\underline{\mathbb{E}}_{\pi} I_{[30, \infty)}(x) = 0$ ,  $\bar{\mathbb{E}}_{\pi} I_{[30, \infty)}(x) = 0.7$ .

Этот пример показал, что границы математического ожидания произвольной функции  $g$  могут быть получены без особых вычислительных трудностей, если имеется только один параметр распределения случайной величины  $X$ , а также при наличии обратной функции, позволяющей выразить параметры через границы  $\underline{p}_i$  и  $\bar{p}_i$ . Однако сложно ожидать, что такая же простая процедура может быть использована в случае двух и более параметров.

### 6.8.2. Решение задачи для второго частного случая

Рассмотрим другой частный случай, когда  $m = 0$ , т.е. имеющаяся информация представлена только в виде ограничений (6.39).

Предположим, что параметры распределений вероятностей сами являются случайными величинами с совместной плотностью  $\rho(\Theta)$ . Зная плотность  $\pi(x|\Theta)$ , можно найти условную вероятность  $P(B|\Theta) = \mathbb{E}_{\pi(x|\Theta)} I_B(x)$  события  $B(x)$  при условии, что  $\Theta$  – вектор параметров функции плотности  $\pi$ . Тогда вероятность события  $B$  вычисляется следующим образом:

$$P(B) = \mathbb{E}_{\rho(\Theta)}(P(B|\Theta)) = \mathbb{E}_{\rho(\Theta)}(\mathbb{E}_{\pi(x|\Theta)} I_B(x)).$$

Это соответствует байесовской модели неопределенности с известным распределением вероятностей на втором уровне. Эта модель сводится к модели первого порядка “интегрированием по параметрам более высоких порядков” [6, 42, 43, 44].

Представленный подход для определения вероятности события  $B$  обобщается на случай, когда необходимо найти математическое ожидание функции  $g$ . В этом случае

$$\mathbb{E}_{\pi} g = \mathbb{E}_{\rho(\Theta)}(\mathbb{E}_{\pi(x|\Theta)} g(x)).$$

Обозначим  $G(g, \Theta) = \mathbb{E}_{\pi(x|\Theta)}g(x)$ . Если имеются оценки в виде (6.40) и необходимо найти  $\mathbb{E}_{\pi}g = \mathbb{E}_{\rho(\Theta)}G(g, \Theta)$ , то при отсутствии информации о плотности  $\rho(\Theta)$  можно найти границы  $\mathbb{E}_{\pi}g$ , решая следующие задачи оптимизации:

$$\underline{\mathbb{E}}_{\pi}g = \min_{\rho} \mathbb{E}_{\rho(\Theta)}G(g, \Theta), \quad \bar{\mathbb{E}}_{\pi}g = \max_{\rho} \mathbb{E}_{\rho(\Theta)}G(g, \Theta) \quad (6.44)$$

при ограничениях (6.40).

Соответствующие двойственные задачи имеют вид:

$$\underline{\mathbb{E}}_{\pi}g = \max_{c_0, c_i, d_i} \left( c_0 + \sum_{i=1}^n (c_i \underline{\alpha}_i - d_i \bar{\alpha}_i) \right)$$

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$$c_0 + \sum_{i=1}^n (c_i - d_i) h_i(\Theta) \leq G(g, \Theta), \quad \forall \Theta \in \Lambda,$$

и

$$\bar{\mathbb{E}}_{\pi}g = \min_{c_0, c_i, d_i} \left( c_0 + \sum_{i=1}^n (c_i \bar{\alpha}_i - d_i \underline{\alpha}_i) \right)$$

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$$c_0 + \sum_{i=1}^n (c_i - d_i) h_i(\Theta) \geq G(g, \Theta), \quad \forall \Theta \in \Lambda.$$

**Пример 6.12.** Предположим, что имеется следующая информация о параметре  $\lambda$  экспоненциального распределения:

$$\begin{aligned} 0.2 &\leq \Pr\{\lambda \in [0.02, 0.03]\} \leq 0.5, \\ 0.7 &\leq \Pr\{\lambda \in [0.04, 0.05]\} \leq 0.8. \end{aligned}$$

На первый взгляд, эксперты дают противоречивую информацию, так как  $[0.02, 0.03] \cap [0.04, 0.05] = \emptyset$ . Однако можно увидеть, что степени доверия к экспертным оценкам делают эту информацию согласованной. Найдем вероятность  $\Pr\{X \geq 30\}$  при условии, что  $X$  имеет экспоненциальное распределение. Это можно сделать, решив задачи оптимизации:

$$\underline{\mathbb{E}}_{\pi}g = \min_{\rho} \mathbb{E}_{\rho(\lambda)}G(I_{[30, \infty)}(x), \lambda),$$

$$\bar{\mathbb{E}}_{\pi}g = \max_{\rho} \mathbb{E}_{\rho(\lambda)} G(I_{[30, \infty)}(x), \lambda)$$

при ограничениях

$$0.2 \leq \mathbb{E}_{\rho(\lambda)} I_{[0.02, 0.03]}(\lambda) \leq 0.5,$$

$$0.7 \leq \mathbb{E}_{\rho(\lambda)} I_{[0.04, 0.05]}(\lambda) \leq 0.8.$$

Здесь  $\lambda \in \Lambda = \mathbb{R}_+$  и  $G(I_{[30, \infty)}(x), \lambda) = \exp(-30 \cdot \lambda)$ . Двойственная задача для вычисления  $\bar{\mathbb{E}}_{\pi}g$  имеет вид

$$\underline{\mathbb{E}}_{\pi}g = \max_{c_0, c_1, d_1, d_2} (c_0 + 0.2c_1 - 0.5d_1 + 0.7c_2 - 0.8d_2)$$

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$  и  $\forall \lambda \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} c_0 + (c_1 - d_1) I_{[0.02, 0.03]}(\lambda) + (c_2 - d_2) I_{[0.04, 0.05]}(\lambda) \leq \\ \leq \exp(-30 \cdot \lambda). \end{aligned}$$

Разделим множество значений  $\lambda$  на интервалы  $[0, 0.02]$ ,  $[0.02, 0.03]$ ,  $[0.03, 0.04]$ ,  $[0.04, 0.05]$ ,  $[0.05, \infty)$  на каждом интервале  $\lambda$ . Индикаторные функции не изменяются, если  $\lambda$  находится внутри этих интервалов. Следовательно, бесконечное множество ограничений в задаче программирования сводится к 5 ограничениям с минимальными правыми частями, т.е. с минимальными значениями  $\exp(-30 \cdot \lambda)$ . Функция  $\exp(-30 \cdot \lambda)$  является убывающей. Следовательно, для каждого интервала значений  $\lambda$  необходимо в правой части ограничений подставить максимальные значения  $\lambda$ . Таким образом, ограничения приобретают вид:

$$c_0 \leq \exp(-30 \cdot 0.02),$$

$$c_0 + (c_1 - d_1) \leq \exp(-30 \cdot 0.03),$$

$$c_0 \leq \exp(-30 \cdot 0.04),$$

$$c_0 + (c_2 - d_2) \leq \exp(-30 \cdot 0.05),$$

$$c_0 \leq 0.$$

Задача оптимизации для вычисления  $\bar{\mathbb{E}}_{\pi}g$  записывается аналогично. Решая обе задачи, получаем следующие результаты:

$$\underline{\mathbb{E}}_{\pi} I_{[30, \infty)}(x) = 0.242, \quad \bar{\mathbb{E}}_{\pi} I_{[30, \infty)}(x) = 0.421.$$

### 6.8.3. Решение задачи в общем случае

Предположим теперь, что оба типа оценок (6.37) и (6.39) имеют место. В этом случае задачи оптимизации для вычисления границ  $\underline{\mathbb{E}}_{\pi}g$  и  $\bar{\mathbb{E}}_{\pi}g$  имеют вид:

$$\bar{\mathbb{E}}_{\pi}g = \max_{\rho} \mathbb{E}_{\rho(\Theta)} G(g, \Theta), \quad (6.45)$$

$$\mathbb{E}_\pi g = \min_\rho \mathbb{E}_{\rho(\Theta)} G(g, \Theta) \quad (6.46)$$

при ограничениях (6.37) и (6.39).

**Утверждение 6.1.** *Задачи (6.45)–(6.46) эквивалентны задаче оптимизации с теми же целевыми функциями, с  $n$  ограничениями (6.40) и  $m$  ограничениями вида*

$$\underline{p}_i \leq \mathbb{E}_{\rho(\Theta)} G(f_i, \Theta) \leq \bar{p}_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.47)$$

**Доказательство.** Рассмотрим одну из задач (6.45)–(6.46), например задачу вычисления верхней границы  $\bar{\mathbb{E}}_\pi g$ . Вводя новую переменную  $C$ , можно переписать (6.41) следующим образом:

$$\bar{\mathbb{E}}_\pi g = \max C$$

при ограничениях (6.39) и

$$\begin{aligned} C &\geq \mathbb{E}_{\pi(x|\Theta)} g(x) = G(g, \Theta), \\ \underline{p}_i &\leq \mathbb{E}_{\pi(x|\Theta)} f_i(x) = G(f_i, \Theta) \leq \bar{p}_i, \quad i \leq m. \end{aligned}$$

Предполагая, что интегралы в ограничениях являются неотрицательными, и принимая во внимание очевидное условие  $\mathbb{E}_{\rho(\Theta)} \mathbf{1} = 1$ , получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\rho(\Theta)} C &\geq \mathbb{E}_{\rho(\Theta)} G(g, \Theta), \\ \mathbb{E}_{\rho(\Theta)} \underline{p}_i &\leq \mathbb{E}_{\rho(\Theta)} G(f_i, \Theta) \leq \mathbb{E}_{\rho(\Theta)} \bar{p}_i, \quad i \leq m. \end{aligned}$$

Отсюда

$$C \geq \mathbb{E}_{\rho(\Theta)} G(g, \Theta), \quad \underline{p}_i \leq \mathbb{E}_{\rho(\Theta)} G(f_i, \Theta) \leq \bar{p}_i, \quad i \leq m,$$

что и требовалось доказать.

Докажем, что ограничения (6.47) можно заменить ограничениями (6.37). Согласно работе [127], оптимальная плотность  $\rho^*(\Theta)$  является весовой суммой функций Дирака  $\delta(\Theta - \Theta_k)$ , которые сконцентрированы в точке  $\Theta_k$ , т.е.

$$\rho^*(\Theta) = \sum_{k=1}^{m+n+1} c_k \delta(\Theta - \Theta_k),$$



где  $\sum_{k=1}^{m+n+1} c_k = 1$ . Тогда (6.47) переписывается как

$$\underline{p}_i \leq \sum_{k=1}^{m+n+1} c_k G(f_i, \Theta_k) \leq \bar{p}_i$$

или

$$\underline{p}_i \leq \int_{\mathbb{R}} f_i(x) \left( \sum_{k=1}^{m+n+1} c_k \pi(x|\Theta_k) \right) dx \leq \bar{p}_i.$$

Отсюда  $\underline{p}_i \leq \mathbb{E}_{\pi(x|\Theta)} f_i(x) \leq \bar{p}_i$ ,  $\pi(x|\Theta) = \sum_{k=1}^{m+n+1} c_k \pi(x|\Theta_k)$ . ■

Утверждение 6.1 позволяет комбинировать оба типа экспертных оценок, что можно проиллюстрировать следующим примером.

**Пример 6.13.** Предположим, что информация о случайной величине  $X$ , имеющей экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda$ , такая же как и в примере 6.11. Однако добавляется следующая оценка о параметре  $\lambda$ :

$$0.7 \leq \Pr\{\lambda \in [0.04, 0.05]\} \leq 0.8.$$

Найдем вероятность  $\Pr\{X \geq 30\}$ . Задачи оптимизации для вычисления нижней и верхней границ вероятности имеют вид:

$$\underline{\mathbb{E}}_{\pi} g = \min_{\rho} \mathbb{E}_{\rho(\lambda)} G(I_{[30, \infty)}(x), \lambda),$$

$$\bar{\mathbb{E}}_{\pi} g = \max_{\rho} \mathbb{E}_{\rho(\lambda)} G(I_{[30, \infty)}(x), \lambda)$$

при ограничениях

$$0.1 \leq \mathbb{E}_{\rho(\lambda)} G(I_{[0, 10]}(x), \lambda) \leq 0.2,$$

$$0.3 \leq \mathbb{E}_{\rho(\lambda)} G(I_{[0, 20]}(x), \lambda) \leq 0.5,$$

$$0.7 \leq \mathbb{E}_{\rho(\lambda)} I_{[0.04, 0.05]}(\lambda) \leq 0.8.$$

Здесь

$$G(I_{[30, \infty)}(x), \lambda) = \exp(-30 \cdot \lambda),$$

$$G(I_{[0, 10]}(x), \lambda) = 1 - \exp(-10 \cdot \lambda),$$

$$G(I_{[0, 20]}(x), \lambda) = 1 - \exp(-20 \cdot \lambda).$$

Результаты решения задач – границы вероятности

$$\underline{\mathbb{E}}_{\pi} I_{[30, \infty)}(x) = 0.574, \quad \bar{\mathbb{E}}_{\pi} I_{[30, \infty)}(x) = 0.581.$$

Сравнивая полученные результаты с результатами решения примера 6.11, можно сказать, что дополнительная информация существенно снижает неточность итоговых оценок.

**Пример 6.14.** Рассмотрим более сложный пример. Пусть информация о случайной величине  $X$ , такая же как и в примере 6.11. Однако известно, что  $X$  имеет нормальное распределение с параметрами  $\mu$  (математическое ожидание) и  $\sigma$  (среднеквадратическое отклонение). Тогда

$$G(I_{[30,\infty)}(x), \mu, \sigma) = 1 - \Phi((30 - \mu)/\sigma),$$

$$G(I_{[0,10]}(x), \mu, \sigma) = \Phi((10 - \mu)/\sigma),$$

$$G(I_{[0,20]}(x), \mu, \sigma) = \Phi((20 - \mu)/\sigma).$$

Здесь  $\Phi$  – стандартная функция нормального распределения (функция Лапласа). Предполагая, что параметры  $\mu$  и  $\sigma$  статистически независимы, запишем задачи оптимизации для вычисления границ  $\underline{\mathbb{E}}_{\pi} I_{[30,\infty)}(x)$  и  $\overline{\mathbb{E}}_{\pi} I_{[30,\infty)}(x)$ :

$$\underline{\mathbb{E}}_{\pi} g = \min_{\rho_1, \rho_2} \mathbb{E}_{\rho_1(\mu) \cdot \rho_2(\sigma)} G(I_{[30,\infty)}(x), \mu, \sigma),$$

$$\overline{\mathbb{E}}_{\pi} g = \max_{\rho_1, \rho_2} \mathbb{E}_{\rho_1(\mu) \cdot \rho_2(\sigma)} G(I_{[30,\infty)}(x), \mu, \sigma)$$

при ограничениях

$$0.1 \leq \mathbb{E}_{\rho_1(\mu) \cdot \rho_2(\sigma)} G(I_{[0,10]}(x), \mu, \sigma) \leq 0.2,$$

$$0.3 \leq \mathbb{E}_{\rho_1(\mu) \cdot \rho_2(\sigma)} G(I_{[0,20]}(x), \mu, \sigma) \leq 0.5.$$

Очевидно, что данные задачи оптимизации не являются линейными вследствие нелинейности, вносимой произведением плотностей случайных параметров  $\mu$  и  $\sigma$ . Поэтому для решения используется приближенный алгоритм. Результаты решения задач:  $\underline{\mathbb{E}}_{\pi} g = 0.1$ ,  $\overline{\mathbb{E}}_{\pi} g = 0.63$ .

#### 6.8.4. Осторожные оценки при известном типе распределения

Наибольшая сложность использования предлагаемого подхода для обработки оценок заключается в определении границ  $\underline{\alpha}_j$  и  $\overline{\alpha}_j$ , когда эксперты предоставляют интервалы  $A_j$  параметров, т.е.  $h_j(\Theta) = I_{A_j}(\Theta)$ ,  $A_j \subset \Lambda$ . Одним из возможных путей преодоления этой сложности является применение обобщенной модели Дирихле, согласно которой каждому интервалу  $A_j$  параметров можно поставить в соответствие нижнюю  $\underline{P}(A_j|s)$  и верхнюю  $\overline{P}(A_j|s)$  вероятности, зависящие от

параметра модели  $s$  и определяемые с использованием подхода, представленного в разделе 5.5. Обозначим

$$\underline{\alpha}_j = \underline{P}(A_j|s), \quad \bar{\alpha}_j = \bar{P}(A_j|s), \quad j = 1, \dots, n.$$

Для каждой из  $m$  оценок (6.37) определим границы вероятностей  $\underline{\beta}_i = \underline{P}(\Psi_i|s)$  и  $\bar{\beta}_i = \bar{P}(\Psi_i|s)$ , которые вычисляются также с использованием обобщенной модели Дирихле на основе анализа множеств  $\Psi_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Тогда оценки (6.37) представляются в виде следующих неравенств:

$$\underline{\beta}_i \leq \mathbb{E}_{\rho(\Theta)} I_{\Psi_i}(\Theta) \leq \bar{\beta}_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Здесь  $I_{\Psi_i}(\Theta)$  – индикаторная функция, принимающая значение 1, если  $\Theta \in \Psi_i$ .

В итоге получаем следующие задачи оптимизации для вычисления границ  $\underline{\mathbb{E}}_{\pi}g$  и  $\bar{\mathbb{E}}_{\pi}g$ :

$$\underline{\mathbb{E}}_{\pi}g = \min_{\rho} \mathbb{E}_{\rho(\Theta)} G(g, \Theta), \quad \bar{\mathbb{E}}_{\pi}g = \max_{\rho} \mathbb{E}_{\rho(\Theta)} G(g, \Theta)$$

при ограничениях

$$\underline{\alpha}_j \leq \mathbb{E}_{\rho(\Theta)} h_j(\Theta) \leq \bar{\alpha}_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\underline{\beta}_j \leq \mathbb{E}_{\rho(\Theta)} I_{\Psi_j}(\Theta) \leq \bar{\beta}_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Соответствующие двойственные задачи имеют вид:

$$\underline{\mathbb{E}}_{\pi}g = \max_{c_0, c_i, d_i} \left[ c_0 + \sum_{i=1}^n (c_i \underline{\alpha}_i - d_i \bar{\alpha}_i) + \sum_{i=1}^m (v_i \underline{\beta}_i - w_i \bar{\beta}_i) \right]$$

при ограничениях  $c_i, d_i, v_j, w_j \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $\forall \Theta \in \Lambda$ ,

$$G(g, \Theta) \geq c_0 + \sum_{i=1}^n (c_i - d_i) h_i(\Theta) + \sum_{i=1}^m (v_i - w_i) I_{\Psi_i}(\Theta)$$

и

$$\bar{\mathbb{E}}_{\pi}g = \min_{c_0, c_i, d_i} \left[ c_0 + \sum_{i=1}^n (c_i \bar{\alpha}_i - d_i \underline{\alpha}_i) + \sum_{i=1}^m (v_i \bar{\beta}_i - w_i \underline{\beta}_i) \right]$$

при ограничениях  $c_i, d_i, v_j, w_j \in \mathbb{R}_+, c_0 \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m, \forall \Theta \in \Lambda,$

$$G(g, \Theta) \leq c_0 + \sum_{i=1}^n (c_i - d_i) h_i(\Theta) + \sum_{i=1}^m (v_i - w_i) I_{\Psi_i}(\Theta).$$

**Пример 6.15.** Вернемся к примеру 6.13 при условии, что оценка параметра  $\lambda$  имеет вид:  $\lambda \in [0.04, 0.05]$ , а нижняя и верхняя границы вероятности оценки неизвестны. Как показано в примере 6.11, оценки (6.42) и (6.43) образуют множества  $\Psi_1 = [0.0105, 0.0223]$  и  $\Psi_2 = [0.0178, 0.0346]$  значений параметра  $\lambda$ . Используя обозначения, введенные в этом разделе, запишем  $A_1 = [0.04, 0.05]$ . Можно заметить, что приведенные выше оценки являются противоречивыми. Заметим, что  $\Psi_1 \cap \Psi_2 \neq \emptyset, \Psi_i \cap A_1 = \emptyset, i = 1, 2, \Psi_1 \not\subseteq \Psi_2, \Psi_2 \not\subseteq \Psi_1, A_1 \not\subseteq \Psi_i, \Psi_i \not\subseteq A_1, i = 1, 2.$  Отсюда следует

$$\underline{P}(A_1|s) = \frac{1}{3+s}, \quad \overline{P}(A_1|s) = \frac{s+1}{3+s},$$

$$\underline{P}(\Psi_i|s) = \frac{1}{3+s}, \quad \overline{P}(\Psi_i|s) = \frac{s+2}{3+s}, \quad i = 1, 2.$$

Пусть  $s = 1$ . Тогда

$$\underline{\mathbb{E}}_{\pi} g = \min_{\rho} \mathbb{E}_{\rho(\lambda)} \exp(-30 \cdot \lambda), \quad \overline{\mathbb{E}}_{\pi} g = \max_{\rho} \mathbb{E}_{\rho(\lambda)} \exp(-30 \cdot \lambda)$$

при ограничениях

$$0.25 \leq \mathbb{E}_{\rho(\lambda)} I_{[0.0105, 0.0223]}(\lambda) \leq 0.75,$$

$$0.25 \leq \mathbb{E}_{\rho(\lambda)} I_{[0.0178, 0.0346]}(\lambda) \leq 0.75,$$

$$0.25 \leq \mathbb{E}_{\rho(\lambda)} I_{[0.04, 0.05]}(\lambda) \leq 0.5.$$

Двойственная задача для вычисления нижней границы имеет вид:

$$\underline{\mathbb{E}}_{\pi} g = \max_{c_0, c_i, d_i} (c_0 + 0.25c_1 - 0.5d_1 + \\ + 0.25v_1 - 0.75w_1 + 0.25v_2 - 0.75w_2)$$

при ограничениях  $c_i, d_i, v_j, w_j \in \mathbb{R}_+, c_0 \in \mathbb{R}$  и  $\forall \lambda \geq 0,$

$$\exp(-30 \cdot \lambda) \geq c_0 + (c_1 - d_1) I_{[0.04, 0.05]}(\lambda) + \\ + (v_1 - w_1) I_{[0.0105, 0.0223]}(\lambda) + \\ + (v_2 - w_2) I_{[0.0178, 0.0346]}(\lambda).$$

Решая эти задачи, получаем:

$$\underline{\mathbb{E}}_{\pi} I_{[30, \infty)}(x) = 0.184, \quad \overline{\mathbb{E}}_{\pi} I_{[30, \infty)}(x) = 0.775.$$

## 6.9. Заключение

В заключение необходимо отметить, что иерархические модели являются достаточно мощным инструментом обработки и комбинирования неточных, разнородных и противоречивых экспертных оценок. Более того, использование обобщенной модели Дирихле позволяет работать с противоречивыми экспертными оценками без использования каких-либо возможных дополнительных предположений о качестве этих оценок. Полученные иерархические модели являются более реалистичными для многих практических случаев, когда информация ограничена и неизвестны точные законы распределения вероятностей. Они позволяют получить возможно менее информативные, но более осторожные оценки без использования неоправданных предположений, которые могут привести к существенным ошибкам и высокому риску неправильного решения. Неточность получаемых оценок отражает состояние исходной информации. Она зависит существенно от числа имеющихся экспертных оценок, их неточности, противоречивости, а также от параметра осторожности модели Дирихле.

В данной главе рассмотрены в основном модели второго порядка одной случайной величины. Случаи, когда вычисляются функции двух и более переменных, являющихся случайными и описываемых моделями второго порядка, исследованы в работах [100, 106, 109, 110].

В то же время из примеров видно, что, даже для простых задач, использование предлагаемых иерархических моделей наталкивается на значительные вычислительные трудности. Поэтому их применение существенно ограничено на практике, пока не будут созданы эффективные алгоритмы расчетов.

## Часть II

# Анализ риска и принятие решений



## Глава 7

### Классические методы принятия решений

В действительности человек хочет не знаний, а определенности.

*Бертран Рассел*

#### 7.1. Постановка задачи принятия решений в условиях неопределенности

Мы принимаем решение в повседневной жизни каждый день большое число раз. При этом наши решения могут быть “правильными” и “неправильными” в некотором смысле, оптимальными и неоптимальными. Решения, принимаемые нами, обычно ориентированны на ситуацию, которая произойдет или будет иметь место в ближайшем или далеком будущем, но само решение опирается на опыт, знания и интуицию, основанные на событиях прошлого. Поэтому основная сложность принятия того или иного решения заключается в том, что информация о “будущем” обычно ограничена и неопределенна. Если неотчетливые решения могут иногда приниматься интуитивно, то для принятия ответственных решений, связанных со значимыми последствиями, требующими учета большого числа факторов, необходим формальный математический аппарат, позволяющий сравнивать возможные альтернативные действия или решения не только качественно, но и количественно. Для этого прежде всего необходимо определить основные элементы ситуации принятия решений и классифицировать задачи принятия решений с точки зрения информации, имеющейся в распоряжении, так чтобы отнести интересующую нас ситуацию принятия решений к той или



иной типовой задаче.

Классическим методам принятия решений посвящено большое количество публикаций [157, 163, 164, 170, 182]. Поэтому эти методы будут рассмотрены достаточно кратко.

### 7.1.1. Основные элементы задачи принятия решений

Принятие решений имеет смысл, если существуют различные варианты альтернативных действий, число которых не меньше 2 и выбор одного из которых может привести к определенным последствиям. Пусть имеется совокупность  $\mathcal{A}$  альтернативных *действий* (*альтернативы, мероприятия, операции*)

$$\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}, \quad n \geq 2,$$

которые может совершить или выбрать лицо, принимающее решение (ЛПР), для достижения поставленной цели. Примерами альтернативных действий могут быть: {открыть счет в банке, купить акции предприятия, держать деньги дома}, {производить одно изделие, два изделия и т.д.}, {использовать одну единицу оборудования, две и т.д.}.

На выбор того или иного решения (действия) оказывают влияние объективные условия. Например, на открытие счета в банке или покупку акций предприятия влияет экономическая ситуация, которая будет иметь место на определенном периоде времени; на количество производимых изделий влияет величина спроса на эти изделия (относительная или абсолютная). Объективные условия представляются в задаче принятия решений в виде множества *состояний природы*  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ , одно из которых  $\omega_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , будет иметь место в действительности в момент реализации или выполнения выбранного действия. Приведем примеры состояний природы: {экономический спад в заданный период времени ( $\omega_1$ ), подъем ( $\omega_2$ ) и стабильное состояние ( $\omega_3$ )}, {низкий спрос на продукцию ( $\omega_1$ ), средний спрос ( $\omega_2$ ), высокий спрос ( $\omega_3$ )}, {выполнение ( $\omega_1$ ) и невыполнение ( $\omega_2$ ) обязательств поставщика комплектующих}.

Таких примеров можно привести множество в зависимости от конкретной задачи. Главной особенностью множества

состояний природы является то, что это множество должно быть полным, т.е. оно должно включать все возможные ситуации. Другой особенностью множества состояний природы является то, что заранее не известно, какое состояние будет иметь место в будущем.

Состояния природы могут быть также комбинированными. Например, если одновременно рассматривать второй и третий примеры состояний природы, то получим следующее множество из 6 состояний: низкий спрос и выполнение обязательств, низкий спрос и невыполнение обязательств, средний спрос и выполнение обязательств, средний спрос и невыполнение обязательств, высокий спрос и выполнение обязательств, высокий спрос и невыполнение обязательств.

До сих пор рассматривались конечные множества дискретных состояний природы. Однако следует отметить, что множество состояний природы может быть бесконечным и непрерывным. Например, если наше решение достаточно жестко зависит от объема продаж в ближайшем будущем, который выражен в денежных условных единицах, то множество состояний в данном случае – множество неотрицательных вещественных чисел.

Другим фактором, влияющим на принятие решений, т.е. на выбор одного из действий, является последствие принимаемого решения, выраженное в некоторой числовой форме и зависящее от состояния природы. Другими словами, последствие есть функция, определенная на множестве альтернатив и на множестве состояний природы, т.е. для каждого действия  $a_i$  и для каждого состояния природы  $\omega_j$  определим последствия в виде *полезности* (выгода, доход) в некоторых единицах  $u(a_i, \omega_j)$ , т.е.  $u : (\mathcal{A} \times \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ . Кроме того, определим случайную величину  $\mathbf{u}(a_i)$  на  $(\Omega, \mathcal{P}o(\Omega))$ , принимающую значения  $u(a_i, \omega_j)$ . Величины  $u(a_i, \omega_j)$ , играющие роль платежей в теории игр, обычно задаются из эвристических, субъективных соображений. При этом возникают специфические трудности при их числовой оценке, обусловленные такими факторами, как болезни, удовольствия, престиж, репутация и т.д. Значения полезности можно задавать относительно, поэтому их также называют показателями предпочтения. В экономи-

ческих задачах зачастую вместо полезностей используются потери, обозначаемые  $l(a_i, \omega_j)$ . При этом потери и полезности связаны между собой соотношением  $u(a_i, \omega_j) = -l(a_i, \omega_j)$ , т.е. значение потерь может быть сведено формально к полезности, поставив знак отрицания. Другими словами, значения потерь можно рассматривать как отрицательные значения полезности. В дальнейшем для краткости будем записывать  $u_{ij}$  вместо  $u(a_i, \omega_j)$ .

Если множество состояний природы является непрерывным, то полезности задаются обычно в виде некоторой типовой функции  $u(a_i, \omega)$ , где, в частности,  $\omega \in [a, b]$ . Например, если состояния природы определяются объемом продаж  $\omega$ , выраженных в денежных единицах, и полезности линейно зависят от этого объема продаж, то  $u(a_i, \omega) = v_i \omega + w_i$ , где параметры  $v_i$  и  $w_i$  зависят от конкретной альтернативы.

Задача ЛППР состоит в том, чтобы принять какое-либо решение или выполнить какое-либо действие из совокупности  $\mathcal{A}$ . Каждое из этих действий есть *чистая стратегия*. Однако при многократном принятии решений совсем не обязательно ограничиваться использованием только одной чистой стратегии. Можно использовать смесь чистых стратегий в соответствии с некоторым законом распределения вероятностей  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , определенным на множестве действий  $(\mathcal{A}, \mathcal{P}o(\mathcal{A}))$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . В этом случае будем говорить о *смешанной стратегии*, или *рандомизированном действии*. При смешанной стратегии чистые стратегии используются с вероятностями  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Можно заметить, что смешанные стратегии образуют бесконечное множество альтернатив, каждый элемент которого определяется некоторым распределением  $\lambda$ . Соответственно полезность каждой альтернативы при заданном состоянии природы  $\omega_j$  зависит от  $\lambda$  и определяется как  $u(\lambda, \omega_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{ij}$ .

В большинстве задач принятия решений смешанная стратегия  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  может быть реализована одним из следующих способов [171].

1. *Вероятностный способ* состоит в том, что принимающий решение выбирает одну из альтернатив не путем явного указания, а случайно, причем так что  $\lambda_i$  есть вероятность вы-

Таблица 7.1. Функция полезности

	Быстрый подъем	Средний подъем	Неизменное состояние	Спад
Облигации	12	8	6	3
Акции	15	7	3	-2
Депозит	7	7	7	7

бора альтернативы  $a_i$ .

2. *Физическая смесь стратегий* получается тогда, когда возможно «смешивание» альтернатив (эта возможность определяется физической природой альтернатив). В этом случае вектор  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  соответствует физической смеси чистых стратегий, в которой  $\lambda_i$  – доля  $i$ -х чистых стратегий.

3. *Статистический способ* может быть реализован в том случае, когда решение принимается многократно. Тогда  $i$ -я компонента вектора  $\lambda$  указывает частоту использования  $i$ -й чистой стратегии.

Приведем пример постановки задачи принятия решений. Предположим, что необходимо выбрать одно из трех ( $n = 3$ ) действий: купить облигации ( $a_1$ ), купить акции предприятия ( $a_2$ ) или положить деньги в банк на депозит ( $a_3$ ). Каждое из действий зависит от четырех ( $m = 4$ ) возможных состояний природы, которые являются состояниями экономики в течение одного года: быстрый подъем экономики ( $\omega_1$ ), средний подъем экономики ( $\omega_2$ ), неизменное состояние экономики ( $\omega_3$ ), спад экономики ( $\omega_4$ ). Функция полезности, характеризующая ставку дохода в процентах от вложенной суммы, представлена в табл. 7.1.

Решение задачи выбора оптимального действия полностью определяется двумя факторами: 1) типом и объемом информации о состояниях природы и 2) критерием оптимальности альтернативы. Собственно говоря, критерий оптимальности также зависит от имеющейся информации о состояниях природы. Поясним более детально, что подразумевается под понятием информации о состояниях природы. Информация о состояниях природы отражает степень уверенности в том, какое состояние будет в действительности иметь место, или степень уверенности, что одно состояние более вероят-

но по сравнению с другим. В то же время, множество самих состояний является известным. Информация о состояниях существенно влияет на решение задачи. Так, например, если с уверенностью 100% известно, что будет иметь место быстрый подъем экономики, то очевидно, что покупка акций предприятия даст наибольший доход. Рассмотренная ситуация является наиболее простой и приводит к принятию решений в условиях полной *определенности*. Другим крайним случаем является отсутствие какой-либо информации о состояниях природы. В этой ситуации имеет место задача принятия решений в условиях *неопределенности*. Конечно, это достаточно редкий случай, так как обычно, исходя из предыдущего опыта или наблюдений, а также текущих тенденций, можно с некоторой вероятностью говорить о будущих состояниях. Однако знание вероятностей состояний не значит, что, выбрав оптимальное решение на основе этой информации, получаем максимальный выигрыш, так как даже высокая вероятность состояния не означает, что будет реализовано именно это состояние. Другими словами, принимая решение в данной ситуации, риск ошибочного действия все равно остается. Поэтому задача принятия решений при такой исходной информации ведет к поиску решения в условиях *риска*. В то же время, даже если известны вероятности некоторых состояний, это совсем не означает, что можно построить единственное распределение вероятностей для состояний природы, и есть смысл рассматривать множества распределений. Информация о состояниях природы вообще необязательно может быть представлена в виде каких-либо вероятностей. Например, это могут быть сравнительные оценки состояний. В тех случаях, когда невозможно определить единственное распределение вероятностей для состояний природы, имеет место задача принятия решений в условиях *неполноты информации*. В принципе принятие решений в условиях неполноты информации является частным случаем принятия решений в условиях риска. Однако здесь эти классы задач разделяются, так как их решения и критерии существенно отличаются друг от друга.

Каждая задача принятия решений имеет свой *критерий* оптимальности, т.е. некоторое правило, по которому численно

определяется условие предпочтения одного действия по отношению к другому. Критерий оптимальности определяет упорядочивание всех альтернатив (множества  $\mathcal{A}$ ) по предпочтению. При этом, как уже было сказано, критерий оптимальности полностью зависит от информации о состояниях природы.

В дальнейшем будем рассматривать вопросы определения оптимального действия или наилучшей стратегии только на основе имеющейся априорной информации о состоянии природы без уточнения знаний о действительном состоянии природы путем проведения эксперимента.

## **7.2. Принятие решений в условиях определенности**

Принятие решений в условиях определенности характеризуется однозначной или детерминированной связью между принятым решением и его результатом. Это наиболее простой класс задач принятия решений, когда состояние природы, которое будет определено иметь место, известно заранее, т.е. до выполнения действия. ЛПР в данном случае может всегда точно предсказать последствия от выбора каждого действия. Это фактически означает, что число состояний сводится к одному, т.е.  $m = 1$ . Поэтому логично потребовать от рационального лица, принимающего решение, выбрать то действие, которое дает наибольшее значение функции полезности. Если в задаче с вложением денег определено известно, что будет иметь место быстрый подъем экономики, то из трех альтернатив с полезностью 12, 15 и 7, выбирается та, которая соответствует максимальной полезности 15, т.е. покупка акций предприятия.

## **7.3. Принятие решений в условиях неопределенности**

В условиях неопределенности лицо, принимающее решение, не может сказать что-либо о возможных состояниях природы, т.е. абсолютно неизвестно, какое из состояний будет

иметь место. Для решения данной задачи наиболее распространенными критериями принятия решений являются:

- 1) критерий равновозможных состояний (критерий Лапласа);
- 2) критерий максимина Вальда;
- 3) критерий пессимизма–оптимизма Гурвица;
- 4) критерий минимакса сожалений Сэвиджа.

Следует отметить, что приведенные критерии являются далеко не единственными для принятия решений в условиях неопределенности. Однако остальные критерии являются в основном комбинацией этих критериев.

### 7.3.1. Критерий равновозможных состояний

Критерий равновозможных состояний основан на предположении Лапласа, согласно которому, если вероятности состояний абсолютно неизвестны, то они предполагаются быть равными. Согласно этому критерию, действие  $a_k$  является оптимальным, если

$$\sum_{j=1}^m u_{kj} = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^m u_{ij},$$

т.е. выбирается то действие, сумма значений полезности которого по всем состояниям природы максимальна.

В задаче с вложением денег для каждого действия вычисляются суммарные полезности:

$$a_1 : 12 + 8 + 6 + 3 = 29,$$

$$a_2 : 15 + 7 + 3 - 2 = 23,$$

$$a_3 : 7 + 7 + 7 + 7 = 28.$$

Первое действие дает максимальное значение суммарной полезности. Следовательно, оно является оптимальным.

### 7.3.2. Критерий максимина Вальда

Согласно критерию максимина, для каждой строки (для каждого действия) матрицы значений полезности определяется минимальное значение полезности. Далее из всех действий

выбирается такое, которое соответствует максимальному из полученных минимальных значений, т.е. действие  $a_k$  является оптимальным, если

$$\min_{j=1,\dots,m} u_{kj} = \max_{i=1,\dots,n} \min_{j=1,\dots,m} u_{ij}.$$

Обозначим  $\underline{u}_k = \min_{i=1,\dots,m} u_{ki}$ . Тогда, возвращаясь к задаче с вложением денег, можно вычислить:

$$\begin{aligned}\underline{u}_1 &= \min(12, 8, 6, 3) = 3, \\ \underline{u}_2 &= \min(15, 7, 3, -2) = -2, \\ \underline{u}_3 &= \min(7, 7, 7, 7) = 7.\end{aligned}$$

Отсюда  $\max(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) = \max(3, -2, 7) = 7$ , что соответствует третьему действию. Следовательно, оптимальное действие – это положить деньги в банк на депозит.

Следует отметить, что критерий максимина является перестраховочным, поскольку природа не может быть сознательным противником. По критерию Вальда выбирают стратегию, которая дает гарантированный выигрыш при наихудшем варианте состояния природы. Логическая основа критерия заключается в том, что из всех возможных состояний природы выбирается “наихудшее” для каждого действия с точки зрения полезности. ЛПП не может столкнуться с более худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется. Критерий максимина используется крайним пессимистом, не желающим идти ни на какой риск. Поэтому этот критерий иногда называют критерием крайнего пессимизма.

### 7.3.3. Критерий пессимизма–оптимизма Гурвица

Критерий Гурвица является в некотором смысле компромиссным критерием и использует линейную комбинацию оптимистического и пессимистического подходов. Пусть

$$\bar{u}_k = \max_{i=1,\dots,m} u_{ki}, \quad \underline{u}_k = \min_{i=1,\dots,m} u_{ki}.$$

Согласно критерию Гурвица, действие  $a_k$  является оптимальным, если

$$\alpha \cdot \underline{u}_k + (1 - \alpha) \cdot \bar{u}_k = \max_{i=1,\dots,n} \{ \alpha \cdot \underline{u}_i + (1 - \alpha) \cdot \bar{u}_i \}.$$



Здесь  $\alpha \in [0, 1]$  – коэффициент, или параметр, пессимизма. Критерий Гурвица основан на следующих двух предположениях: природа может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью  $\alpha$  и в самом выгодном – с вероятностью  $1 - \alpha$ . Заметим, что если  $\alpha = 1$ , то критерий Гурвица сводится к критерию максимина. Если  $\alpha = 0$ , то критерий Гурвица сводится к так называемому критерию максимакса. Выбор коэффициента  $\alpha$  полностью определяется ЛПР.

Если в задаче с вложением денег использовать критерий Гурвица с  $\alpha = 0.5$ , то

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}_1 &= \max(12, 8, 6, 3) = 12, \\ \bar{\mathbf{u}}_2 &= \max(15, 7, 3, -2) = 15, \\ \bar{\mathbf{u}}_3 &= \max(7, 7, 7, 7) = 7.\end{aligned}$$

Значения  $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3$  уже были получены при рассмотрении критерия максимина Вальда. Тогда

$$\begin{aligned}0.5 \cdot \underline{\mathbf{u}}_1 + 0.5 \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 &= 7.5, \\ 0.5 \cdot \underline{\mathbf{u}}_2 + 0.5 \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 &= 6.5, \\ 0.5 \cdot \underline{\mathbf{u}}_3 + 0.5 \cdot \bar{\mathbf{u}}_3 &= 7.\end{aligned}$$

Отсюда оптимальное действие – это покупка облигаций ( $a_1$ ), так как это действие соответствует максимальному значению выражения  $0.5 \cdot \underline{\mathbf{u}}_i + 0.5 \cdot \bar{\mathbf{u}}_i$ .

Критерий Гурвица является достаточно гибким за счет возможности изменения коэффициента  $\alpha$ .

### 7.3.4. Критерий минимакса сожалений Сэвиджа

Сожаление в теории принятия решений – это потери в результате упущенных возможностей. Пусть природа находится в состоянии  $\omega_i$ . Мера сожаления для  $k$ -го действия и  $j$ -го состояния природы определяется как разность

$$\Delta u_{kj} = \max_{i=1, \dots, n} u_{ij} - u_{kj}.$$

Другими словами, мера сожаления  $\Delta u_{kj}$  определяется как разность между максимальным элементом в столбце матрицы

Таблица 7.2. Матрица сожалений

	Быстрый подъем	Средний подъем	Неизменное состояние	Спад
Облигации	3	0	1	4
Акции	0	1	4	9
Депозит	8	1	0	0

полезности и самим значением полезности  $u_{kj}$  в этом столбце. Она означает максимальный дополнительный выигрыш, который достигается, если для  $j$ -го состояния природы вместо  $k$ -го действия выбрать оптимальное для этого состояния действие. Заметим, что мера сожаления всегда положительна. Согласно критерию минимакса сожалений Сэвиджа, действие  $a_k$  является оптимальным, если

$$\max_{j=1,\dots,m} \Delta u_{kj} = \min_{i=1,\dots,n} \max_{j=1,\dots,m} \Delta u_{ij}.$$

Фактически для принятия решений используется критерий минимакса (минимум из максимальных значений), но не для матрицы полезности, а для матрицы сожалений.

Используем данный критерий в задаче с вложением денег. Матрица сожалений показана в табл. 7.2.

Обозначив  $Q_i = \max_{j=1,\dots,m} \Delta u_{ij}$ , можно записать:

$$Q_1 = \max\{3, 0, 1, 4\} = 4,$$

$$Q_2 = \max\{0, 1, 4, 9\} = 9,$$

$$Q_3 = \max\{8, 1, 0, 0\} = 8.$$

Отсюда  $\min(Q_1, Q_2, Q_3) = \min(4, 9, 8) = 4$ , что соответствует первому действию. Следовательно, оптимальное действие – это покупка облигаций ( $a_1$ ).

## 7.4. Принятие решений в условиях риска

Ситуация принятия решений в условиях риска возникает в случаях, когда известны априорные вероятности состояний природы, т.е. имеется информация о распределении

$$\pi(\omega_1), \dots, \pi(\omega_m), \sum_{i=1}^m \pi(\omega_i) = 1.$$

Данное распределение может быть получено на основе статистического анализа состояний природы или их субъективного описания. Например, исходя из статистических данных об экономической ситуации и основных тенденциях ее изменения, можно сделать прогноз относительно состояния экономики на определенный период. Так, рассматривая три состояния: низкий спрос на продукцию предприятия, средний спрос, высокий спрос, можно предположить, учитывая различные факторы спроса, что шансы иметь низкий спрос примерно равны 10%, шансы иметь средний спрос – около 60% и шансы иметь высокий спрос равны  $100 - 10 - 60 = 30\%$ .

Вероятности комбинированных состояний вычисляются как произведения вероятностей соответствующих исходных состояний, если выполняется условие независимости комбинированных факторов.

В случае бесконечного множества состояний, например  $\Omega = [a, b]$ , априорное распределение состояний заменяется плотностью  $\pi$ , определенной на множестве значений  $\omega$  и удовлетворяющей условию

$$\int_{\Omega} \pi(x) dx = 1.$$

Существует ряд критериев принятия решений при наличии вероятностей состояний природы. К наиболее известным относятся: критерий максимума ожидаемой полезности; критерий Ходжа–Лемана; критерий наиболее вероятного состояния природы; критерий минимума ожидаемых сожалений.

#### 7.4.1. Критерий максимума ожидаемой полезности

Это наиболее распространенный критерий, согласно которому оптимальное действие имеет максимальную ожидаемую полезность. Обозначим вектор значений полезности, соответствующих  $k$ -му действию,  $\mathbf{u}_k = (u_{k1}, \dots, u_{km})$ . Ожидаемая полезность  $k$ -го действия есть математическое ожидание полезности, соответствующей этому действию, т.е.

$$\mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^m u_{kj} \cdot \pi(\omega_j).$$

Следует отметить, что если множество состояний природы бесконечно и известна плотность  $\pi$ , то ожидаемая полезность  $k$ -ого действия определяется как

$$\mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}_k = \int_{\omega} u_k(x) \cdot \pi(x) dx.$$

Критерий оптимальности можно записать следующим образом. Действие  $a_k$  является оптимальным, если для любого  $i \neq k$  выполняется неравенство  $\mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}_k \geq \mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}_i$  или условие  $\mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}_k = \max_{i=1, \dots, n} \mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}_i$ .

Рассмотрим снова пример с вложением денег, предполагая, что с вероятностью 0.4 будет происходить быстрый рост экономики, с вероятностью 0.2 будет средний рост, с вероятностью 0.3 будет неизменное состояние и с вероятностью 0.1 будет спад, т.е.  $\pi(\omega_1) = 0.4$ ,  $\pi(\omega_2) = 0.2$ ,  $\pi(\omega_3) = 0.3$ ,  $\pi(\omega_4) = 0.1$ . Тогда ожидаемые полезности альтернатив вычисляются как

$$\mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}_1 = 12 \cdot 0.4 + 8 \cdot 0.2 + 6 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.1 = 8.5,$$

$$\mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}_2 = 15 \cdot 0.4 + 7 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.3 - 2 \cdot 0.1 = 8.1,$$

$$\mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}_3 = 7 \cdot 0.4 + 7 \cdot 0.2 + 7 \cdot 0.3 + 7 \cdot 0.1 = 7.$$

Максимальное значение ожидаемой полезности –  $\mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}_1 = 8.5$ . Следовательно, оптимальное действие – это покупка облигаций ( $a_1$ ).

Так как критерий максимума ожидаемой полезности является одним из наиболее важных и распространенных, рассмотрим использование этого критерия при определении смешанной стратегии, или рандомизированного действия, т.е. задача заключается в определении такого распределения вероятностей  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$  на множестве действий  $\mathcal{A}$ , при котором ожидаемая полезность

$$\mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}(\lambda^*) = \sum_{j=1}^m u(\lambda^*, \omega_j) \pi(\omega_j) = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^* u_{ij} \right) \pi(\omega_j)$$

была бы максимальной. Другими словами, стратегия  $\lambda^*$  является оптимальной, если для всех распределений  $\lambda$  выполняет-

ся неравенство  $\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda^*) \geq \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda)$ . Таким образом, для нахождения оптимальной стратегии  $\lambda^*$  необходимо решить следующую задачу линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{ij} \right) \pi(\omega_j) \rightarrow \max_{\lambda}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Достаточно просто показать, что оптимальное решение задачи – чистая стратегия, т.е.  $\lambda_i \in \{0, 1\}$ . Действительно, множество распределений  $\lambda$  образует  $n$ -мерный симплекс вероятностей, а оптимальное решение задачи линейного программирования определяется крайними точками множества допустимых решений. Поэтому оптимальным распределением  $\lambda^*$  является одно из следующих (крайние точки):

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1).$$

Таким образом, задача поиска оптимальной смешанной стратегии сводится к уже рассмотренной задаче максимизации ожидаемой полезности, т.е. к поиску оптимальной чистой стратегии. В то же время, если расширить задачу принятия решений, наложив на распределение  $\lambda$  дополнительные ограничения, например  $\lambda_i \geq \lambda_k$  для некоторых  $i$  и  $k$ , то смешанная стратегия может отличаться от чистой.

Предположим, что в примере с вложением денег используется смешанная стратегия, но с условием, что вложения в акции будут осуществляться чаще, чем в облигации. Тогда появляется дополнительное ограничение на распределение  $\lambda$  в виде неравенства  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ . В результате имеем следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda) = & 0.4(12\lambda_1 + 15\lambda_2 + 7\lambda_3) + 0.2(8\lambda_1 + 7\lambda_2 + 7\lambda_3) + \\ & + 0.3(6\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3) + 0.1(3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 7\lambda_3) \rightarrow \max_{\lambda} \end{aligned}$$

при ограничениях  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$  и  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ .

Оптимальное решение:  $\lambda_1^* = 0.5$ ,  $\lambda_2^* = 0.5$ ,  $\lambda_3^* = 0$ . При этом следует отметить, что  $\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda^*) = 8.3$ , что меньше, чем  $\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_1 = 8.5$ . Однако введенное дополнительное условие не позволяет использовать  $a_1$  в качестве оптимального действия.

## 7.4.2. Критерий Ходжа–Лемана

Критерий Ходжа–Лемана базируется одновременно на критериях максимина Вальда и максимума ожидаемой полезности [48]. Обозначим

$$\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^m u_{kj} \cdot \pi(\omega_j), \quad \underline{\mathbf{u}}_k = \min_{j=1, \dots, m} u_{kj} = \underline{\mathbf{u}}_k.$$

Тогда действие  $a_k$  является оптимальным, если

$$\alpha \cdot \underline{\mathbf{u}}_k + (1 - \alpha) \cdot \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_k = \max_{i=1, \dots, n} \{ \alpha \cdot \underline{\mathbf{u}}_i + (1 - \alpha) \cdot \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_i \}.$$

Здесь  $\alpha \in [0, 1]$  – коэффициент, или параметр, пессимизма. Заметим, что если  $\alpha = 1$ , то критерий Ходжа–Лемана сводится к критерию максимина. Если  $\alpha = 0$ , то критерий Ходжа–Лемана сводится к критерию максимума ожидаемой полезности.

Если в задаче с вложением денег применять критерий Ходжа–Лемана с  $\alpha = 0.5$ , то, используя уже ранее полученные значения ожидаемой полезности (см. параграф 7.4.1) и значения  $\underline{\mathbf{u}}_k$  (см. параграф 7.3.2), получаем:

$$0.5 \cdot \underline{\mathbf{u}}_1 + 0.5 \cdot \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_1 = 0.5 \cdot 3 + 0.5 \cdot 8.5 = 5.75,$$

$$0.5 \cdot \underline{\mathbf{u}}_2 + 0.5 \cdot \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_2 = 0.5 \cdot (-2) + 0.5 \cdot 8.1 = 3.05,$$

$$0.5 \cdot \underline{\mathbf{u}}_3 + 0.5 \cdot \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_3 = 0.5 \cdot 7 + 0.5 \cdot 7 = 7.$$

Отсюда оптимальное действие – это положить деньги в банк на депозит ( $a_3$ ), так как это действие соответствует максимальному значению величины  $0.5 \cdot \underline{\mathbf{u}}_i + 0.5 \cdot \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_i$ .

### 7.4.3. Критерий наиболее вероятного состояния природы

Согласно критерию наиболее вероятного состояния, выбирается состояние природы, вероятность которого максимальна, и далее задача решается в условиях полной определенности в предположении, что обязательно будет иметь место выбранное состояние. Оптимальным считается действие, соответствующее максимальному значению полезности для выбранного состояния. В примере с вложением денег максимальную вероятность  $\pi(\omega_1) = 0.4$  имеет состояние быстрого роста экономики. Для этого состояния покупка акций имеет наибольшую полезность (15). Следовательно, оптимальное действие – покупка акций ( $a_2$ ).

Следует отметить, что критерий наиболее вероятного состояния природы используется достаточно редко и в основном при существенном различии между максимальной вероятностью и остальными вероятностями состояний природы.

### 7.4.4. Критерий минимума ожидаемых сожалений

Критерий минимума ожидаемых сожалений является обобщением критерия минимакса сожалений Сэвиджа, используемого для решения задачи принятия решений в условиях неопределенности. Согласно данному критерию, вычисляется матрица сожалений и затем для каждого действия вычисляется ожидаемое сожаление как математическое ожидание функции сожалений. Оптимальное действие соответствует минимальному значению ожидаемого сожаления. Обозначим вектор сожалений, соответствующих  $k$ -му действию,  $\Delta \mathbf{u}_k = (\Delta u_{k1}, \dots, \Delta u_{km})$ . Ожидаемое сожаление для  $k$ -го действия равно

$$\mathbb{E}_\pi \Delta \mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^m \Delta u_{kj} \cdot \pi(\omega_j).$$

Критерий оптимальности можно записать следующим образом. Действие  $a_k$  является оптимальным, если для любого  $i \neq k$  выполняется неравенство  $\mathbb{E}_\pi \Delta \mathbf{u}_k \leq \mathbb{E}_\pi \Delta \mathbf{u}_i$  или условие  $\mathbb{E}_\pi \Delta \mathbf{u}_k = \min_{i=1, \dots, n} \mathbb{E}_\pi \Delta \mathbf{u}_i$ .

Используем данный критерий в задаче с вложением денег. Ожидаемые сожаления (см. матрицу сожалений в описании критерия минимакса сожалений Сэвиджа) имеют вид:

$$\mathbb{E}_\pi \Delta \mathbf{u}_1 = 3 \cdot 0.4 + 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.1 = 1.9,$$

$$\mathbb{E}_\pi \Delta \mathbf{u}_2 = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.3 + 9 \cdot 0.1 = 2.3,$$

$$\mathbb{E}_\pi \Delta \mathbf{u}_3 = 8 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.1 = 3.4.$$

Минимальное значение ожидаемого сожаления равно  $\mathbb{E}_\pi \Delta \mathbf{u}_1 = 1.9$ . Следовательно, оптимальное действие – покупка облигаций ( $a_1$ ).

## 7.5. Определение функции полезности и психологические аспекты принятия решений

Вернемся к критерию максимума ожидаемой полезности, так как он имеет наибольшее распространение при решении задач принятия решений. Матрица (таблица) полезности, рассмотренная в примерах, содержит полезности (доходы), выраженные в терминах денег. Однако ожидаемые денежные значения не всегда являются наилучшим критерием в задачах принятия решений. Значение денег изменяется в различных ситуациях и для различных лиц, принимающих решение. Необходимо отметить, что значение или полезность денег не является линейной функцией от количества денег. Люди осуществляют страховые выплаты для того, чтобы избежать возможности финансовых потерь в результате нежелательных событий. В то же время, если потери в будущем могут оказаться относительно большими, человек предпочитает осуществить страховые выплаты. Если субъект считает, что потери будут незначительными или маловероятными, то шанс приобретения им страховки существенно уменьшается.

Субъекты различаются в их отношении к риску, и эти различия влияют на их выбор. Поэтому ожидаемый денежный доход как мера для принятия решений может быть неприемлемым по ряду причин, одной из которых является тот факт,



что ожидаемые денежные значения могут не совсем адекватно отражать нежелание рисковать. Например, предположим, что имеется выбор между получением 10\$ без каких-либо условий как гарантированный доход или за участие в игре. Результат игры зависит от подбрасывания симметричной монеты. Если выпадает орел, то игрок получает 1000\$. Однако, если выпадает решка, игрок теряет 950\$. Первая альтернатива имеет ожидаемое вознаграждение 10\$, вторая —  $0.5 \cdot 1000 + 0.5 \cdot (-950) = 25\$$ . Очевидно, что второй выбор был бы более предпочтительным, если бы критерием было бы ожидаемое денежное вознаграждение. В то же время субъект может предпочесть гарантированные 10\$, чтобы избежать риска потери 950\$. Другим примером является покупка лотерейных билетов. Люди зачастую покупают не задумываясь билет за 1\$. В то же время достаточно сложно найти кого-либо, кто купит лотерейный билет за 10000\$ при том же ожидаемом выигрыше.

Рассмотрим известный Санкт–Петербургский парадокс Бернулли. Парадокс состоит в следующем: симметричную монету, вероятности выпадения орла и решки которой равны  $1/2$ , бросают до тех пор, пока не появится орел. Игрок получает  $2^m$  \$, если первое выпадение орла произойдет на  $m$ -м испытании. Вероятность этого события равна вероятности последовательного выпадения решек в первых  $n - 1$  испытаниях и появления орла на  $m$ -м испытании, которая равна  $(1/2)^m$ . Таким образом, игрок может получить 2\$ с вероятностью  $1/2$ , 4\$ с вероятностью  $1/4$ , 8\$ с вероятностью  $1/8$  и т.д. Следовательно, среднее (ожидаемое) значение выигрыша равно

$$2 \cdot 1/2 + 4 \cdot 1/4 + \dots = 1 + 1 + \dots,$$

и эта сумма бесконечна. Отсюда следует, что за участие в игре можно заплатить какую угодно сумму. Однако никто не будет в этом случае руководствоваться средним денежным выигрышем. Бернулли предложил рассматривать не денежную стоимость исходов, а их значимость для играющего или “внутреннюю” стоимость денег. Разумно предположить, что для многих субъектов “внутренняя” стоимость денег увеличивается с ростом суммы денег, но в меньшей степени. Такой

функцией является, например, логарифм. Так, если полезность  $n\$$  равна  $\lg n$ , то ожидаемое значение полезности игры равно  $1/2 \cdot \lg 2 + 1/4 \cdot \lg 4 + \dots$ , что является конечным числом.

Процесс принятия решений включает среди прочих психологические и экономические факторы, и концепция полезности – это попытка измерить полезность денег для ЛПР и объяснить возникающие противоречия и парадоксы принятия решений. Поэтому для того, чтобы принять осознанное решение, учитывающее отношение ЛПР к риску, необходимо преобразовать функцию или матрицу доходов в функцию или матрицу полезности. Возникает вопрос, как измерить функцию полезности для конкретного ЛПР.

Рассмотрим пример задачи принятия решений относительно инвестиций. Прежде всего определим, что означает полезность, скажем  $u_{11} = 12$ . Это можно сделать в соответствии со следующим алгоритмом.

а. Назначим 100 единиц полезности и ноль единиц полезности соответственно наибольшему и наименьшему доходам, выраженным в \$, в таблице доходов. Для рассматриваемого числового примера, назначается 100 единиц значению 15, и 0 – значению  $-2$ .

б. Попросим ЛПР выбрать между следующими сценариями:

б.1. Просто получить 12\$ как гарантированный доход  
или

б.2. Участвовать в следующей игре: выиграть 15\$ с вероятностью  $\pi$  или выиграть 2\$ с вероятностью  $(1 - \pi)$ , где  $\pi$  – некоторое число от 0 до 1.

Изменяя значение  $\pi$  и повторяя аналогичный вопрос, найдется значение  $\pi$ , при котором ЛПР не может выбрать из двух сценариев один из-за их “одинаковости” с его точки зрения. Скажем  $\pi = 0.58$ .

с. Теперь полезность 12\$ равна  $0.58 \cdot 100 + (1 - 0.58) \cdot 0 = 58$ .

д. Повторяя эту процедуру для всех элементов таблицы доходов, получим матрицу полезности.

Интересно отметить, что данная процедура аналогична уже рассмотренному определению субъективных вероятностей.

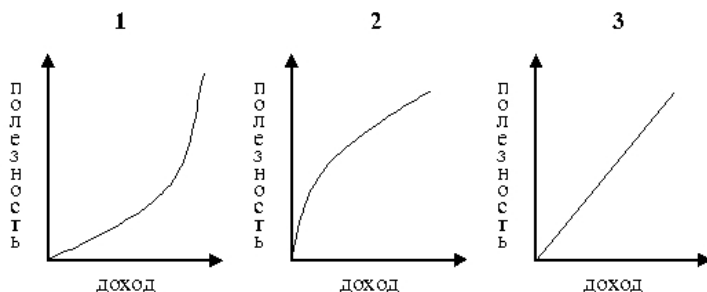


Рис. 7.1. Типовые графики зависимости полезности от дохода

Формально можно говорить о том, что полезность  $u$  есть функция дохода  $w$ , т.е.  $u = u(w)$ . С точки зрения отношения ЛПР к значимости денег можно выделить три типа поведения:

1. ЛПР готов идти на риск. Обычно говорят: *ищущие риск*. Очевидно, что некоторые люди в большей степени готовы идти на риск, чем другие: чем больше вознаграждение за риск, тем больше готовность идти на него. График зависимости полезности от величины дохода ( $u = u(w)$ ) – выпуклая линия.

2. ЛПР готов избежать риска. Обычно говорят: *нерасположенные рисковать*. График зависимости полезности от величины дохода – вогнутая линия.

3. ЛПР не относится ни к первой, ни ко второй группе. Обычно говорят: *нейтральные к риску*. График зависимости полезности от величины дохода – прямая линия.

Типовые графики зависимости полезности от дохода для всех рассмотренных видов отношений к риску показаны на рис. 7.1.

На принятие решений также оказывают значительное влияние целый ряд психологических факторов, достаточно подробное описание которых приведено в работе Москвина [165]. Одним из таких факторов является *неприятие неопределенности*.

Мы склонны верить, что информация является необходимой составляющей рационального процесса принятия реше-

ний и что чем больше информации, тем легче выстраивать поведение в условиях риска. Эллсберг в 1961 г. опубликовал статью [31], в которой ввел понятие “неприятие неопределенности”. Оно означает, что люди предпочитают риск с известными вероятностями исходов риску с неизвестными вероятностями. Эллсберг предлагал нескольким группам людей ставить на цвет шара, доставаемого из урны. В двух урнах, по 100 шаров в каждой, были шары красного и черного цвета. В первой урне их было по 50 штук каждого цвета, а распределение во второй урне оставалось неизвестным. В соответствии с постулатом Лапласа это распределение следовало бы признать таким же, поскольку нет никаких оснований для иного предположения. Однако большинство респондентов тянули шары из первой урны.

Тверски и его коллега Фокс [35] более детально исследовали неприятие неопределенности и пришли к выводу, что дело обстоит значительно сложнее, чем предполагал Эллсберг. Они провели серию экспериментов, чтобы определить, всегда ли или только в случайных играх люди предпочитают иметь дело скорее с известными вероятностями, чем с неизвестными. Ответ оказался ясным и убедительным: люди предпочитают неизвестные вероятности в тех ситуациях, в которых они чувствуют свою компетентность, и известные вероятности, когда чувствуют себя некомпетентными. Отсюда Тверски и Фокс делают вывод, что неприятие неопределенности порождается чувством некомпетентности и проявляется, когда человек оценивает одновременно ясные и туманные перспективы, но оно уменьшается или исчезает вовсе, если оценивается каждая перспектива в отдельности.

Другим важным фактором является *асимметрия в подходах к принятию решений*. Когда речь идет о значительных суммах, многие отказываются от игры, предпочитая гарантированный доход, т.е. большинство предпочтет просто получить 100 тыс.\$, чем играть, имея шансы 50 на 50, и выиграть 200 тыс.\$ или не получить ничего. Другими словами, большинство людей не расположены к риску.

Но как обстоит дело с потерями? В статье, опубликованной в 1979 г., Канеман и Тверски [51] описали эксперимент,

показывающий, что наш выбор между отрицательными исходами является зеркальным отображением нашего выбора между положительными исходами. В одном из экспериментов они сначала предлагали выбрать между возможностью получить 4 тыс. \$ с вероятностью 0.8 (при вероятности 0.2 остаться при своих) и возможностью получить 3 тыс. \$ с вероятностью 1. Хотя рискованный выбор имел более значительное математическое ожидание (получение 3.2 тыс. \$), 80% опрошенных предпочли гарантированные 3 тыс. \$. Эти люди избегали риска. Затем исследователи предложили выбрать между риском потери 4 тыс. \$ с вероятностью 0.8 (при вероятности 0.2 не потерять ничего) и риском потерять 3 тыс. \$ с вероятностью 1. Теперь 92% опрошенных выбрали игру, хотя математическое ожидание потери 3.2 тыс. \$ снова было больше, чем гарантированная потеря 3 тыс. \$. Когда выбор касается потерь, мы зачастую выбираем риск.

Канеман и Тверски, как и многие их коллеги, выяснили, что такая асимметричность встречается постоянно в самых разных экспериментах. Это поведение явно противоречит предположению о рациональности выбора. Ответ не должен был бы зависеть от формы постановки вопроса. Авторы теории перспективы истолковывают результаты этих экспериментов как демонстрацию того, что людям вовсе не свойственно отвращение к риску: они рады выбрать игру, если считают ее приемлемой. Но если они не боятся рисковать, то в чем же дело? По мнению Тверски, главное, что движет людьми – это опасение потерь. Люди не столько избегают неопределенности, сколько не приемлют потерь. Размеры потерь всегда кажутся больше размеров приобретений.

Перечисление и описание психологических факторов при принятии решений может быть продолжено. Однако приведенные два фактора в совокупности с концепцией полезности наиболее ярко отражают сложность и субъективность процесса принятия решений.

**Пример 7.1. (Выбор оптимального распределения инвестиций, портфельная оптимизация).** Рассмотрим на примере учет поведения ЛПР при инвестировании средств. Кроме того, в данном примере одновременно имеют место смешанная стратегия

и непрерывное множество состояний природы. Предположим, что ЛПР имеет 10000\$ для инвестиций в акции и облигации. Известно, что акции имеют переменный доход, равномерно распределенный со средним значением 10% и среднеквадратическим отклонением 2%. Облигации приносят четкий доход 5%. ЛПР не расположен рисковать и его функция полезности  $-u(w) = \sqrt{w}$ . Учитывая функцию полезности, ЛПР выбирает распределение инвестиций, которое максимизирует функцию полезности. Пусть  $\lambda_1$  – доля инвестиций в акции ( $0 \leq \lambda_1 \leq 1$ ),  $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$  – доля инвестиций в облигации. Ожидаемая полезность инвестора имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbb{E}u(\lambda) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \sqrt{10000\lambda_1(1+r)} dr + \sqrt{10000\lambda_2 \times 1.05} = \\ &= 100 \left[ \frac{1}{b-a} \int_a^b \sqrt{\lambda_1(1+r)} dr + \sqrt{\lambda_2 \times 1.05} \right], \end{aligned}$$

где  $[a, b]$  – интервал возможного дохода от акций и  $r$  – доход от акций.

Так как распределение дохода от акций равномерное, то выполняются условия  $(a+b)/2 = 0.1$  и  $(b-a)^2/12 = 0.0004$ . Отсюда  $a = 0.065$  и  $b = 0.135$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}u(\lambda) &= 100 \left[ \frac{\sqrt{\lambda_1}}{0.07} \int_{0.065}^{0.135} \sqrt{(1+r)} dr + \sqrt{\lambda_2 \times 1.05} \right] = \\ &= 100 \left[ 1.05\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{1.05}\sqrt{(1-\lambda_1)} \right]. \end{aligned}$$

Оптимальное значение  $\lambda_1$  равно 0.51, т.е. 51% денег следует вложить в акции и 49% – в облигации.

Если ЛПР готов идти на риск и его функция полезности  $-u(w) = w^2$ , то оптимальное значение  $\lambda_1$  равно 0.47, т.е. 47% денег следует вложить в акции и 53% – в облигации.

**Пример 7.2. (Определение величины страховки).** Предположим, что субъект (ЛПР) имеет дом стоимостью  $W$ \$. Существует вероятность  $\pi$  того, что дом может быть разрушен наводнением или сгореть в пожаре. Предположим также, что ЛПР может купить такую страховку, что 1\$ ее стоимости покрывается  $x$ \$. Здесь  $x$  – страховая премия. Страховку какого размера готов купить ЛПР? Очевидно, что он купит страховку, которая совместима с его ощущением риска, т.е. соответствующую его индивидуальной функции полезности  $u(w)$ . Исходя из критерия максимума ожидаемой полезности, стоимость страховки  $q$  должна максимизировать ожидаемую

полезность

$$\mathbb{E}u(q) = \pi u(q - xq) + (1 - \pi)u(W - xq).$$

Это выражение получено из следующих соображений. Если дом разрушен с вероятностью  $\pi$ , его хозяин получит страховку  $q$  минус страховые выплаты  $xq$ . С другой стороны, с вероятностью  $1 - \pi$  дом не будет разрушен. В этом случае его стоимость будет равна  $W - xq$ . Если считать, что функция  $u$  определена только для положительных доходов, то  $W - xq \geq 0$ . Это гарантирует, что значения ожидаемой полезности  $\mathbb{E}u(q)$  находятся в интервале  $[0, W/x]$ . Пусть  $W = 100000$ ,  $\pi = 0.01$ ,  $x = 0.02$ . Тогда максимум  $\mathbb{E}u(q)$  зависит от типа ЛПР.

Случай 1. ЛПР не расположен рисковать и его функция полезности  $-u(w) = \sqrt{w}$ . В этом случае

$$\begin{aligned}\mathbb{E}u(q) &= \pi\sqrt{(1-x)q} + (1-\pi)\sqrt{W-xq} = \\ &= 0.01 \left[ \sqrt{0.98q} + 99\sqrt{W-0.02q} \right].\end{aligned}$$

Дифференцируя  $\mathbb{E}u(q)$  по  $q$  и принимая  $d\mathbb{E}u(q)/dq = 0$ , получим  $q = 24873\$$ .

Случай 2. Субъект является ищущим риска и его функция полезности  $-u(w) = w^2$ . В этом случае

$$\begin{aligned}\mathbb{E}u(q) &= \pi(q-xq)^2 + (1-\pi)(W-xq)^2 = \\ &= 0.01(q^2 - 3.96Wq + 99W^2).\end{aligned}$$

Ожидаемая полезность максимальна при  $q = 0\$$ . Это означает, что данный субъект вообще не будет покупать страховку.

Случай 3. Субъект является нейтральным к риску и  $u(w) = w$ . Тогда

$$\mathbb{E}u(q) = -0.01q + 99000.$$

Ожидаемая полезность максимальна при  $q = 0\$$ .

## 7.6. Основные аксиомы теории полезности

Если решение  $a$  ведет к одному из альтернативных уровней дохода  $w_1$ ,  $w_2$  и  $w_3$ , то результатом решения будет один из альтернативных уровней полезности  $u(w_1)$ ,  $u(w_2)$  и  $u(w_3)$ . Если известны вероятности  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  и  $\pi_3$  каждого из трех исходов, то ожидаемая полезность решения  $a$  равна

$$\mathbb{E}u(a) = \pi_1 u(w_1) + \pi_2 u(w_2) + \pi_3 u(w_3).$$

Функция  $u(w)$  также называется функцией полезности фон Неймана–Моргенштерна.

Представление предпочтений в форме ожидаемой полезности фон Неймана–Моргенштерна  $Eu(a)$  гарантируется при условии соблюдения ряда аксиом, которые приводятся ниже [163, 166, 170].

Каждое решение, принятое в условиях неопределенности или риска, можно рассматривать как выбор лотереи  $L$  по всем альтернативным уровням дохода  $w_i$ , где каждому уровню  $w_i$  дохода приписана вероятность  $\pi_i$ . Вероятность  $\pi_i$  есть вероятность получения дохода  $w_i$ , когда решение сделано. Введем понятие лотереи. Лотерея есть случайный механизм, который дает в качестве исходов события получение доходов  $w_1, \dots, w_m$  с известными вероятностями  $\pi_1, \dots, \pi_m$ ,  $\pi_1 + \dots + \pi_m = 1$ . Как показано в работе [164], лотерею можно представить как следующий опыт: единичная окружность разбивается на дуги длиной  $\pi_1, \dots, \pi_m$ , поворачивают стрелку, и, если ее конец остановился на дуге длиной  $\pi_i$ , это значит, что исходом является выигрыш  $w_i$ .

Лотерею  $L$  можно рассматривать как множество пар вида  $L = \{(w_i, \pi_i) : i = 1, \dots, m\}$ , и принятие решений представляется как выбор одной из альтернативных лотерей. Если субъект должен выбрать одну из двух лотерей  $L_1$  и  $L_2$ , то устанавливаются предпочтения субъекта:  $L_1$  предпочтительнее  $L_2$ ,  $L_2$  предпочтительнее  $L_1$ ,  $L_1$  и  $L_2$  неразличимы или равноценны. Будем понимать под записью  $w_i \succsim w_j$  то, что  $w_j$  не предпочтительнее, чем  $w_i$ , или  $w_i$  предпочтительнее, чем  $w_j$ , или равноценно  $w_j$ .

**Аксиома 1 (порядок альтернатив).** *Порядок “предпочтения или равноценности”  $\succsim$  имеет место для любых двух выигрышей и является транзитивным понятием. Формально, для любых  $w_i$  и  $w_j$  либо  $w_i \succsim w_j$ , либо  $w_j \succsim w_i$ , а если  $w_i \succsim w_j$  и  $w_j \succsim w_k$ , то  $w_i \succsim w_k$ .*

Предположим, что имеются две лотереи с одним и тем же множеством альтернатив

$$L_1 = \{(w_i, \pi_i) : i = 1, \dots, m\},$$

$$L_2 = \{(w_i^*, \pi_i^*) : i = 1, \dots, m\}.$$



Тогда каждая вероятность  $\pi$  приводит к новой лотереи

$$\begin{aligned} \pi L_1 + (1 - \pi)L_2 = \\ = \{(\pi w_i + (1 - \pi)w_i^*, \pi \pi_i + (1 - \pi)\pi_i^*) : i = 1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Если лотереи  $L_1$  и  $L_2$  не имеют одних и тех же альтернатив, то можно всегда взять объединение  $A$  всех возможных альтернатив и рассматривать  $L_1$  и  $L_2$  как имеющие альтернативы из  $A$ . При этом вероятности альтернатив из  $A$ , не принадлежащих  $L_1$ , равны нулю и наоборот. Любая лотерея вида  $\pi L_1 + (1 - \pi)L_2$  называется составной.

Предположим теперь, что субъект предпочитает лотерею  $L_1$  лотереи  $L_2$ . Естественно ожидать, что если “смешать” третью лотерею  $L_3$  с  $L_1$  и  $L_2$ , то предпочтение  $L_1$  к  $L_2$  останется неизменным. Это рассуждение определяет следующую аксиому.

**Аксиома 2 (независимость).** *Выбор субъекта лотереи удовлетворяет аксиоме независимости, согласно которой всякий раз, когда лотерея  $L_1$  предпочтительнее лотереи  $L_2$ , то для любого  $0 < \pi < 1$  составная лотерея  $\pi L_1 + (1 - \pi)L_3$  предпочтительнее составной лотереи  $\pi L_2 + (1 - \pi)L_3$  для всех лотерей  $L_3$ .*

**Аксиома 3 (непрерывность).** *Выбор субъекта лотереи удовлетворяет аксиоме непрерывности, согласно которой всякий раз, когда последовательность  $\{\pi_n\}$  вероятностей сходится к  $\pi$ , т.е.  $\pi_n \rightarrow \pi$  и лотерея  $\pi_n L_1 + (1 - \pi_n)L_2$  предпочтительнее лотереи  $L_3$  для всех  $n$ , то лотерея  $\pi L_1 + (1 - \pi)L_2$  будет предпочтительнее лотереи  $L_3$ .*

**Теорема ожидаемой полезности.** *Пусть  $L$  – множество всех лотерей. Если функция полезности субъекта  $U : L \rightarrow R$ , определенная на множестве лотерей удовлетворяет приведенным выше аксиомам, то существует функция полезности фон Неймана–Моргенштерна  $u(w)$ , зависящая от дохода  $w$ , такая что*

$$U(L) = \sum_{i=1}^m \pi_i u(w_i)$$

для всех лотерей  $L = \{(w_i, \pi_i) : i = 1, \dots, m\}$ .

Приведенные аксиомы и теорема ожидаемой полезности позволяют взглянуть на поведение ЛПР с формальной точки зрения. Формально выбор типа поведения может быть представлен следующим образом. Рассмотрим лотерею с двумя призами  $w_1$  и  $w_2$ . Также предположим, что функция полезности  $u(w)$  является строго возрастающей. Ожидаемая полезность этой лотереи —  $\pi_1 u(w_1) + (1 - \pi_1) u(w_2)$ , а ожидаемое денежное вознаграждение —  $\pi_1 w_1 + (1 - \pi_1) w_2$ . Выигрыш в этом случае равен

$$w = \pi_1 w_1 + (1 - \pi_1) w_2 - u(\pi_1 u(w_1) + (1 - \pi_1) u(w_2)).$$

Отрицательное значение  $w$  говорит о том, что

$$u(\pi_1 u(w_1) + (1 - \pi_1) u(w_2)) \geq \pi_1 w_1 + (1 - \pi_1) w_2.$$

Следовательно,

$$\pi_1 u(w_1) + (1 - \pi_1) u(w_2) \geq \pi_1 w_1 + (1 - \pi_1) w_2.$$

Это означает, что функция полезности  $u(w)$  является выпуклой, что в свою очередь означает, что ЛПР расположен рисковать. Аналогично можно получить вогнутость функции полезности для нерасположенного рисковать ЛПР. В этом случае  $w$  является положительным.

## 7.7. Заключение

В главе кратко рассмотрены основные хорошо известные методы и ситуации принятия решений. Необходимо отметить, что выполнен обзор только части всех возможных критериев и методов, которые постоянно развиваются и разрабатываются [162] на основе требований, предъявляемых со стороны прикладных задач. При этом можно выделить две крайние ситуации принятия решений: 1) отсутствие какой-либо информации о состояниях природы; 2) наличие полной информации о состояниях природы, т.е. наличие точного распределения вероятностей состояний природы. Для обеих ситуаций были разработаны критерии принятия решений, которые длительной практикой применения подтвердили их обоснованность.

Однако эти две ситуации являются в некотором смысле идеализацией и не отражают многих реальных случаев наличия информации о состояниях природы, с которыми сталкиваются лица, принимающие решения, когда информация может быть неточной, неполной, ненадежной. Методам и алгоритмам принятия решений для этих случаев посвящены следующие главы.

## Глава 8

# Принятие решений при неполной информации

Каждый может принимать решение, располагая достаточной информацией, хороший руководитель принимает решение и при ее нехватке, идеальный – действует в абсолютном неведении.

*Закон исходных данных Спенсера*

### 8.1. Парадокс Эллсберга

До сих пор задача принятия решений рассматривалась в условиях отсутствия какой-либо информации о состояниях природы  $\Omega$  (принятие решений в условиях неопределенности) или наличия точного распределения вероятностей  $\pi$ , определенного на множестве  $\Omega$  (принятие решений в условиях риска). Однако в реальных ситуациях принятия решений эти условия можно считать экстремальными случаями. Обычно всегда при принятии решений имеется какая-либо информация о состояниях природы либо в виде экспертных оценок, либо в виде статистических данных, что позволяет принять более обоснованное и адекватное решение, чем то, что получается при принятии решений в условиях неопределенности. При этом и статистические данные, и тем более экспертные оценки далеко не всегда позволяют определить точное распределение вероятностей  $\pi$ , что делает в свою очередь принятие решений в условиях риска слишком идеализированным. Для обоснования такого решения требуется дополнительно выполнять ана-

лиз его чувствительности к возможным изменениям распределения  $\pi$ . Кроме того, во многих ситуациях просто невозможно точно определить распределение вероятностей вследствие ограниченности имеющейся информации. Необходимо отметить, что принятие решений в этих ситуациях наталкивается на определенные трудности и демонстрирует противоречивые, с точки зрения классической теории ожидаемой полезности, результаты. Примером этого является парадокс Эллсберга.

**Парадокс Эллсберга:** Предположим, что ЛПП должен поставить на цвет шара, вытащенного из урны, содержащей 30 красных шаров ( $\omega_1$ ), 60 зеленых ( $\omega_2$ ) и голубых ( $\omega_3$ ) в неизвестной пропорции. ЛПП знает только то, что вероятность красного шара равна  $1/3$  и больше ничего, т.е. любое распределение вероятностей, удовлетворяющее условию  $1/3 + \pi(\omega_2) + \pi(\omega_3) = 1$ , возможно. Рассмотрим 4 ставки, показанные в табл. 8.1. Большинство людей ставке 2 предпочитают ставку 1 и ставке 3 ставку 4. Заметим, что предпочтение ставки 1 по отношению к ставке 2 говорит о том, что, в соответствии с предположениями ЛПП, в урне находится менее 30 черных шаров или более 30 желтых. В то же время предпочтение ставки 4 по отношению к ставке 3 входит в противоречие с предпочтениями относительно первых двух ставок. Этот пример показывает, что невозможно получить вероятности шаров, исходя из выбора ЛПП. Решения в ситуациях, когда нет никакой информации о вероятностях различных состояний, зачастую опираются не на субъективные вероятности. Выбор ставок 1 и 4 характеризуется поведением ЛПП при условии неприятия неопределенности, так как большинство ЛПП предпочитает ставки, для которых вероятности более определены.

Гилбоа и Шмайдлер [40], Гарденфорс и Салин [37], а также Вайхзельбергер и Аугустин [139] предложили критерий принятия решений для объяснения парадокса Эллсберга. Когда множество распределений вероятностей используется для представления информации о каких-либо состояниях природы, вычисляется минимальная ожидаемая полезность каждого действия. Затем выбирается оптимальное действие, мини-

Таблица 8.1. Варианты принятия решений в эксперименте Эллсберга

Число шаров	30	60	
Ставки	Красный	Черный	Желтый
1	\$100	\$0	\$0
2	\$0	\$100	\$0
3	\$100	\$0	\$100
4	\$0	\$100	\$100

Таблица 8.2. Результаты расчетов для эксперимента Эллсберга

Ставки	Оптимальное распределение			Минимальная ожидаемая полезность
	Красный	Черный	Желтый	
1	1/3	2/3	0	100/3
2	1/3	0	2/3	0
3	1/3	2/3	0	100/3
4	1/3	2/3	0	200/3

мальная ожидаемая полезность которого максимальна<sup>1</sup>. Например, в эксперименте Эллсберга вероятность черного шара может быть любой от 0 до 2/3. Не останавливаясь подробно на методе расчета минимальной ожидаемой полезности (он будет рассмотрен ниже), запишем сразу результаты вычислений в табл. 8.2.

Как видно из результатов, максимум минимальной ожидаемой полезности достигается для ставки 1 (из ставок 1 и 2) и 4 (из ставок 3 и 4).

Этот пример достаточно наглядно показывает, что далеко не всегда можно определить точное распределение вероятностей состояний природы. В то же время замена множества распределений вероятностей каким-либо одним распределением для поиска оптимального действия в задаче принятия решений классическими методами имеет ряд недостатков и может войти в противоречие с поведением большинства людей, а также может привести к ошибочным результатам. Поэтому целесообразно разработать методы и критерии принятия ре-

<sup>1</sup> Забегая вперед, можно сказать, что этот критерий будет в дальнейшем называться критерием Г-максимина.

шений, которые бы учитывали все возможные распределения, ограниченные имеющейся информацией.

В этой главе в основном будут рассмотрены задачи принятия решений с конечным дискретным множеством состояний. Отсутствие точного и единственного распределения вероятностей состояний природы приводит к задаче принятия решений в условиях неполноты информации, которая отличается своими критериями и методами поиска оптимального действия.

## 8.2. Критерии принятия решений

Напомним, что имеется множество  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$  альтернатив, множество состояний природы  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$  и функция полезности  $u : (\mathcal{A} \times \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ . Когда известно точное распределение вероятностей состояний природы  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m)$ , то при заданной функции полезности для каждой альтернативы можно определить точные значения ожидаемой полезности  $\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_r$  (здесь  $\mathbf{u}_r = (u_{r1}, \dots, u_{rm})$ ) в случае чистой стратегии или  $\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda)$  (здесь  $\mathbf{u}(\lambda) = (u(\lambda, \omega_1), \dots, u(\lambda, \omega_m))$ ,  $u(\lambda, \omega_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{ij}$ ) в случае смешанной стратегии. Если точное распределение неизвестно, а имеется только некоторое множество  $\mathcal{M}$  распределений, заданное в том или ином виде, то нельзя найти точное значение ожидаемой полезности. Для каждого распределения  $\pi \in \mathcal{M}$  можно вычислить ожидаемую полезность. Если множество  $\mathcal{M}$  является выпуклым, то множество возможных значений ожидаемой полезности ограничено некоторым нижним  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} \mathbf{u}_r = \inf_{\pi \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_r$  и верхним  $\overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} \mathbf{u}_r = \sup_{\pi \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_r$  значениями, а все остальные значения ожидаемой полезности, соответствующие различным распределениям  $\pi \in \mathcal{M}$ , находятся в интервале  $[\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} \mathbf{u}_r, \overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} \mathbf{u}_r]$ . Следовательно, рассмотренные ранее критерии принятия решений непосредственно не могут быть использованы и необходимо рассмотреть новые критерии, учитывающие интервальный характер ожидаемой полезности.

Наиболее простой путь обобщения критерия ожидаемой полезности – использование в качестве критерия нижней границы ожидаемой полезности. Согласно этому критерию, действие  $r$  является оптимальным, если для всех  $k \in \{1, \dots, n\}$

выполняется неравенство

$$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{u}_r \geq \underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{u}_k. \quad (8.1)$$

Смешанная стратегия  $\lambda^*$  является оптимальной, если для всех  $\lambda$  выполняется неравенство

$$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{u}(\lambda^*) \geq \underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{u}(\lambda). \quad (8.2)$$

Недостатком этого критерия является то, что он использует только нижнюю границу ожидаемой полезности и он является достаточно пессимистическим. Приведенный критерий в литературе называется критерием *Г-максимина*.

Ниже, при описании критериев, будет рассматриваться только чистая стратегия. Критерии для смешанной стратегии аналогичны.

Другим критерием является критерий *Г-максимакса*, согласно которому действие  $r$  является оптимальным, если для всех  $k \in \{1, \dots, n\}$  выполняется неравенство  $\bar{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{u}_r \geq \bar{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{u}_k$ . Это слишком оптимистический критерий, редко используемый на практике.

Более жестким критерием является критерий *интервального доминирования*, согласно которому действие  $r$  является оптимальным, если для всех  $k \in \{1, \dots, n\}$  выполняется неравенство  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{u}_r \geq \bar{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{u}_k$ . Этот критерий аналогичен сравнению непересекающихся интервалов.

Аналогом критерия Гурвица можно назвать критерий с *параметром осторожности*, согласно которому действие  $r$  является оптимальным, если для всех  $k \in \{1, \dots, n\}$  выполняется неравенство

$$\eta \underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{u}_r + (1 - \eta) \bar{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{u}_r \geq \eta \underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{u}_k + (1 - \eta) \bar{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{u}_k, \quad (8.3)$$

где  $\eta \in [0, 1]$  – параметр осторожности.

Это более сложный и гибкий критерий принятия решений, использующий линейную комбинацию нижней и верхней границ ожидаемой полезности. Параметр осторожности отражает степень пессимизма ЛПР по отношению к неопределенности. Чем более пессимистичен ЛПР, тем больше влияние



нижней границы ожидаемой полезности. Значение  $\eta = 1$  соответствует пессимистическому принятию решений, значение  $\eta = 0$  отражает оптимистическое принятие решений. Значение  $1 - \eta$  можно также интерпретировать как вероятность того, что “природа” окажется наиболее благоприятной для ЛПП [73].

Достаточно просто заметить, что приведенные четыре критерия являются аналогами различных правил сравнения интервалов. Поэтому для упорядочения альтернатив эти критерии могут использоваться без непосредственного анализа множества распределений  $\mathcal{M}$ , а только рассматривая интервальные ожидаемые полезности. Следующие критерии являются более сложными и выходят за рамки обычного интервального анализа.

Когда точное распределение состояний природы известно, то из условия  $\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_r \geq \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_k$  следует условие  $\mathbb{E}_\pi(\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_k) \geq 0$ , где  $\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_k = (u_{r1} - u_{k1}, \dots, u_{rm} - u_{km})$ . Этот переход не выполняется для границ ожидаемой полезности. Поэтому Уолли [131] предложил следующий критерий принятия решений. Пусть  $\mathcal{K}$  – множество всех функций вида  $\mathbf{u}_k$ , определенных на множестве состояний природы  $S$ ,  $\mathcal{K} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  или  $\mathcal{K} = \{\mathbf{u}(\lambda) : \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1\}$ . Полезность  $\mathbf{u}_r \in \mathcal{K}$  называется *неразрешенной*, если существует такая полезность  $\mathbf{u}_k \in \mathcal{K}$ , что  $\mathbf{u}_k \geq \mathbf{u}_r$  и  $k \neq r$ . Здесь сравнение осуществляется для всех состояний природы. Иначе  $\mathbf{u}_r$  называется *разрешенной*. Будем говорить, что  $\mathbf{u}_r$  является *максимальной* среди всех функций из  $\mathcal{K}$ , если  $\mathbf{u}_r$  является разрешенной и  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}(\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_k) \geq 0$  для всех  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Другими словами, действие  $a_r$  является оптимальным, если для любого  $k \in \{1, \dots, n\}$  выполняется неравенство

$$\min_{\pi \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_\pi(\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_k) \geq 0 \quad (8.4)$$

и не существует такого  $k$ , что  $\mathbf{u}_k \geq \mathbf{u}_r$  и  $k \neq r$ . Этот критерий называется критерием *максимальности*, или критерием Уолли.

Еще один критерий – *E-допустимость*, или критерий Леви [63]. Выбор оптимальной альтернативы, согласно этому критерию, осуществляется в два этапа. Первый этап – опре-

деление *E-допустимых* действий. Альтернатива  $r$  называется *E-допустимой*, если существует некоторое распределение  $\pi \in \mathcal{M}$  и разрешенная, в соответствии с критерием Уолли, функция полезности  $\mathbf{u}_r$ , такие что ожидаемая полезность  $\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_r$  является максимальной среди всех значений ожидаемой полезности имеющихся альтернатив. Второй этап в процедуре принятия решения заключается в выборе между *E-допустимыми* альтернативами. При этом Леви предлагает выбирать альтернативу, минимальное значение функции полезности которой больше, чем минимальные значения функций полезности других *E-допустимых* альтернатив.

На первый взгляд, данный критерий является достаточно сложным с вычислительной точки зрения. Однако Кикучи, Козман и де Кампос [53] разработали достаточно простой алгоритм для работы с этим критерием.

Необходимо отметить, что каждый критерий имеет свои недостатки и преимущества. Применение того или иного критерия зависит в большей степени от конкретной ситуации принятия решений и от предпочтений ЛПР. Далее будет в основном использоваться критерий  $\Gamma$ -максимина и критерий с параметром осторожности.

Поиск оптимальной альтернативы или действия в задаче принятия решений при неполной информации во многом определяется тем, как образовано множество распределений  $\mathcal{M}$ .

### 8.3. Принятие решений при линейных ограничениях на распределения состояний природы

Прежде всего будем предполагать, что множество  $\mathcal{M}$  образовано линейными относительно  $\pi$  ограничениями вида

$$\underline{b}_i \leq \mathbb{E}_\pi f_i \leq \bar{b}_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad (8.5)$$

или

$$\underline{b}_i \leq \sum_{j=1}^m f_i(\omega_j) \pi_j \leq \bar{b}_i, \quad i = 1, \dots, r,$$

которые можно рассматривать как экспертные оценки о вероятностных характеристиках состояний природы. Каждая оценка – это некоторый интервал математического ожидания функции  $f_i$  или интервальное среднее в терминах теории интервальных средних (см. главу 4). Вид функции в свою очередь определяет тип имеющейся характеристики, например вероятности, если  $f_i$  – индикаторная функция, математического ожидания, если  $f_i$  – линейная функция. Множество таких оценок ограничивает множество всех возможных функций распределения таким множеством  $\mathcal{M}$ , что каждое распределение  $\pi \in \mathcal{M}$  удовлетворяет всем  $r$  неравенствам одновременно. Следует также отметить, что множество  $\mathcal{M}$  является выпуклым.

Для простоты в дальнейшем будут использоваться следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\pi_j &= \pi(\omega_j), \quad u_{ij} = u(a_i, \omega_j), \quad u_j(\lambda) = u(\lambda, \omega_j), \\ \mathbf{1} &= (1, \dots, 1)^T, \quad \mathbf{F}_j = (f_1(\omega_j), \dots, f_r(\omega_j)), \\ \underline{\mathbf{B}} &= (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_r), \quad \overline{\mathbf{B}} = (\overline{b}_1, \dots, \overline{b}_r).\end{aligned}$$

Очевидное условие  $\lambda_i \geq 0$  также не будет записываться в ряде мест.

### 8.3.1. Пессимистическое принятие решений

При поиске оптимальной чистой стратегии, т.е. при выборе одного из оптимальных действий в соответствии с критерием  $\Gamma$ -максимина, для каждого действия вычисляется нижняя граница ожидаемой полезности  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} \mathbf{u}_k$  путем решения следующей задачи линейного программирования:

$$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} \mathbf{u}_k = \min_{\pi \in \mathcal{M}} \sum_{j=1}^m (u_{kj} \cdot \pi_j) \quad (8.6)$$

при ограничениях (8.5).

Обозначим  $\mathbf{C} = (c_1, \dots, c_r)^T$ ,  $\mathbf{D} = (d_1, \dots, d_r)^T$ . Тогда, для приведенной выше задачи программирования, можно также записать двойственную

$$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} \mathbf{u}_k = \max_{\mathbf{c}, \mathbf{C}, \mathbf{D}} \{c + \underline{\mathbf{B}}\mathbf{C} - \overline{\mathbf{B}}\mathbf{D}\} \quad (8.7)$$

при ограничениях  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{C}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}_+^r$  и

$$c + \mathbf{F}_j (\mathbf{C} - \mathbf{D}) \leq u_{kj}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (8.8)$$

Здесь  $c$ ,  $\mathbf{C}, \mathbf{D}$  – переменные оптимизации, такие что переменная  $c$  соответствует ограничению  $\sum_{j=1}^m \pi_j = 1$  в прямой задаче оптимизации,  $c_i$  соответствует ограничению  $\underline{b}_i \leq E_\pi f_i$ ,  $d_i$  соответствует ограничению  $E_\pi f_i \leq \bar{b}_i$ .

Для всех действий вычисляются нижние границы ожидаемой полезности и оптимальное действие определяется из условия (8.1). Таким образом, поиск оптимального решения при использовании чистой стратегии не представляет каких-либо сложностей. Иначе обстоит дело с принятием решений при использовании смешанной стратегии.

Согласно пессимистическому подходу, или критерию Г-максимина, смешанная стратегия  $\lambda^*$  является оптимальной, если для всех  $\lambda$  выполняется неравенство (8.2). Оптимальная стратегия  $\lambda^*$  может быть получена максимизацией нижней ожидаемой полезности  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} \mathbf{u}(\lambda)$  по всем возможным распределениям  $\lambda$ , т.е. необходимо решить задачу оптимизации

$$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} \mathbf{u}(\lambda) \rightarrow \max_{\lambda}$$

при ограничениях  $\lambda \cdot \mathbf{1} = 1$ .

Подставляя выражение для  $\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda)$  в целевую функцию, получим расширенную запись задачи:

$$\min_{\pi \in \mathcal{M}} \sum_{j=1}^m (u_j(\lambda) \cdot \pi_j) \rightarrow \max_{\lambda} \quad (8.9)$$

при ограничениях  $\lambda \cdot \mathbf{1} = 1$ .

Два подхода рассматривается ниже для решения данной задачи [116, 119].

### *Использование двойственной задачи линейного программирования*

Первый подход основан на замене задачи оптимизации с переменными  $\pi$  двойственной задачей. Используя обозначение

ния, введенные при описании чистой стратегии, можно записать двойственную задачу, которая аналогична задаче (8.7)–(8.8) и имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathcal{M}}\mathbf{u}(\lambda) &= \min_{\pi \in \mathcal{M}} \sum_{j=1}^m (u_j(\lambda) \cdot \pi_j) = \\ &= \max_{c, \mathbf{C}, \mathbf{D}} \{c + \underline{\mathbf{B}}\mathbf{C} - \overline{\mathbf{B}}\mathbf{D}\}\end{aligned}\quad (8.10)$$

при ограничениях  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{C}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}_+^r$  и

$$c + \mathbf{F}_j(\mathbf{C} - \mathbf{D}) \leq u_j(\lambda), \quad j = 1, \dots, m. \quad (8.11)$$

Теперь максимизация по всем  $\lambda$  может быть объединена с двойственной задачей следующим образом:

$$\max_{c, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \lambda} \{c + \underline{\mathbf{B}}\mathbf{C} - \overline{\mathbf{B}}\mathbf{D}\} \quad (8.12)$$

при ограничениях  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{C}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}_+^r$  и

$$\begin{aligned}c + \mathbf{F}_j(\mathbf{C} - \mathbf{D}) &\leq u_j(\lambda), \quad j = 1, \dots, m, \\ \lambda \cdot \mathbf{1} &= 1.\end{aligned}\quad (8.13)$$

В результате мы получили задачу линейного программирования с конечным числом ограничений и с переменными  $c$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\lambda$ . Отсюда следует, что оптимальная смешанная стратегия вычисляется путем решения одной задачи линейного программирования (8.12)–(8.13).

### *Использование крайних точек для решения задачи*

Второй подход основан на идее [2, 3] использования крайних точек<sup>2</sup> многогранника  $\mathcal{M}$ . В соответствии с этим подходом вводится новая переменная  $G = \min_{\pi \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_{\pi}\mathbf{u}(\lambda)$ . Тогда

---

<sup>2</sup>Пусть множество распределений  $\pi$  ограничено условиями в матричной форме  $A\pi \leq b$ , где  $A$  – матрица размерности  $r \times m$ ,  $b = (b_1, \dots, b_r)$  – вектор размерности  $r$ . Тогда точка  $\pi^*$  является крайней точкой множества распределений, если она принадлежит этому множеству и является пересечением  $m$  ограниченных гиперплоскостей этого множества.

Один из наиболее простых методов определения крайних точек заключается в следующем. Рассмотрим  $r$  ограниченных гиперплоскостей

задача (8.9) может быть переписана как

$$\max_{\lambda, G} G \quad (8.14)$$

при ограничениях  $G \in \mathbb{R}$  и

$$G \leq \sum_{j=1}^m (u_j(\lambda) \cdot \pi_j), \quad \lambda \cdot \mathbf{1} = 1, \quad \pi \in \mathcal{M}. \quad (8.15)$$

Задача оптимизации (8.14)–(8.15) является линейной, но она содержит бесконечное число ограничений, так как неравенства  $G \leq \sum_{j=1}^m (u_j(\lambda) \cdot \pi_j)$  должны выполняться для всех возможных распределений  $\pi \in \mathcal{M}$ . Для того чтобы обойти это препятствие, заметим, что множество распределений  $\mathcal{M}$  является выпуклым и конечной размерности. Следовательно, оптимальное решение задачи  $\min_{\pi \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}(\lambda)$  достигается на крайних точках  $\text{extr}(\mathcal{M})$  этого множества, число которых конечно. Следовательно, бесконечное число ограничений (8.15) сокращается до конечного числа, т.е. получаем стандартную задачу линейного программирования

$$\max_{\lambda, G} G \quad (8.16)$$

при ограничениях  $G \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \cdot \mathbf{1} = 1$  и

$$G \leq \sum_{j=1}^m \left( \sum_{s=1}^n u_{sj} \lambda_s \cdot \pi_j \right), \quad \pi \in \text{extr}(\mathcal{M}). \quad (8.17)$$

Следует отметить, что второй подход для решения задачи принятия решений при неполной информации требует поиска всех крайних точек множества  $\mathcal{M}$ , что во многих случаях является сложной вычислительной задачей, требующей дополнительного решения множества задач линейного программирования. Первый подход как раз позволяет избежать этой

---

$A_1 \pi = b_1, \dots, A_r \pi = b_r$ , где  $A_i$  – строка матрицы  $A$ . Из этого множества ограничений выделим подмножество из  $m$  гиперплоскостей и решим полученную систему уравнений. Если результат решения – единственная точка  $\pi^*$  и эта точка удовлетворяет всем неравенствам  $A\pi \leq b$ , то  $\pi^*$  – крайняя точка. Выделяя другие подмножества из  $m$  гиперплоскостей, аналогичным образом можно найти все крайние точки.

процедуры и решать только одну задачу оптимизации. Однако первый подход полностью зависит от задания исходной информации о состояниях природы в виде множества ограничений (8.5). Для второго подхода множество  $\mathcal{M}$  может быть задано произвольным образом, например при помощи крайних точек, что делает второй подход более общим с точки зрения применимости.

Интересно отметить, что неполнота вероятностной информации о состояниях природы создает дополнительные ограничения на распределение  $\lambda$  в задачах линейного программирования, рассмотренных выше. Это означает, что в отличие от задачи принятия решений при наличии точного распределения вероятностей состояний природы<sup>3</sup> неполная информация делает смешанную стратегию оптимальной.

### 8.3.2. Принятие решений с использованием параметра осторожности

Рассмотрим более сложный и гибкий критерий принятия решений, использующий линейную комбинацию нижней  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{u}(\lambda)$  и верхней  $\overline{\mathbb{E}}_{\pi}\mathbf{u}(\lambda)$  границ ожидаемой полезности с параметром осторожности  $\eta$ . При этом смешанная стратегия  $\lambda^*$  является оптимальной, если для всех распределений  $\lambda$  выполняется неравенство (8.3).

Для принятия решений с использованием данного критерия необходимо решить следующую задачу оптимизации:

$$\eta \underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{u}(\lambda) + (1 - \eta) \overline{\mathbb{E}}_{\pi}\mathbf{u}(\lambda) \rightarrow \max_{\lambda} \quad (8.18)$$

при ограничениях  $\lambda \cdot \mathbf{1} = 1$ .

Здесь  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{u}(\lambda)$  определяется как

$$\min_{\pi \in \mathcal{M}} \sum_{j=1}^m u_j(\lambda) \cdot \pi_j, \quad (8.19)$$

---

<sup>3</sup>При наличии точного распределения вероятностей состояний природы и при отсутствии дополнительных ограничений на значения  $\lambda$  оптимальной всегда является чистая стратегия (см. раздел 7.4.1).

а  $\overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{u}(\lambda)$  определяется как

$$\max_{\pi \in \mathcal{M}} \sum_{j=1}^m u_j(\lambda) \cdot \pi_j. \quad (8.20)$$

*Использование двойственной задачи линейного программирования*

Первый подход для решения задачи заключается в замене задач оптимизации (8.19)–(8.20) двойственными. Обозначим

$$\mathbf{V} = (v_1, \dots, v_r)^T, \quad \mathbf{W} = (w_1, \dots, w_r)^T.$$

Используя обозначения, введенные в предыдущем разделе, а также подход для решения задачи пессимистического принятия решений, описанный в разделе 8.3.1, можно переписать (8.18) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \eta \cdot \max_{c, \mathbf{C}, \mathbf{D}} \{c + \underline{\mathbf{B}}\mathbf{C} - \overline{\mathbf{B}}\mathbf{D}\} + \\ & + (1 - \eta) \cdot \min_{v, \mathbf{V}, \mathbf{W}} \{v + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{V} - \underline{\mathbf{B}}\mathbf{W}\} \rightarrow \max_{\lambda} \end{aligned}$$

при ограничениях  $c, v \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}_+^r$  и

$$\begin{aligned} c + \mathbf{F}_j (\mathbf{C} - \mathbf{D}) &\leq u_j(\lambda), \quad j = 1, \dots, m, \\ v + \mathbf{F}_j (\mathbf{V} - \mathbf{W}) &\geq u_j(\lambda), \quad j = 1, \dots, m, \\ \lambda \cdot \mathbf{1} &= 1. \end{aligned}$$

Если ввести новую переменную  $H$ , такую что

$$H = \min \{v + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{V} - \underline{\mathbf{B}}\mathbf{W}\},$$

то получим следующую эквивалентную задачу:

$$\eta \left\{ \max_{c, \mathbf{C}, \mathbf{D}} (c + \underline{\mathbf{B}}\mathbf{C} - \overline{\mathbf{B}}\mathbf{D}) \right\} + (1 - \eta)H \rightarrow \max_{\lambda}$$

при ограничениях  $c, v \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}_+^r$  и

$$c + \mathbf{F}_j (\mathbf{C} - \mathbf{D}) \leq u_j(\lambda), \quad j = 1, \dots, m, \quad (8.21)$$

$$v + \mathbf{F}_j (\mathbf{V} - \mathbf{W}) \geq u_j(\lambda), \quad j = 1, \dots, m, \quad (8.22)$$

$$v + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{V} - \underline{\mathbf{B}}\mathbf{W} \geq H, \quad \lambda \cdot \mathbf{1} = 1. \quad (8.23)$$



Эта задача может быть переписана как

$$\eta \{c + \underline{\mathbf{B}}\mathbf{C} - \overline{\mathbf{B}}\mathbf{D}\} + (1 - \eta)H \rightarrow \max_{c, v, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \lambda, H} \quad (8.24)$$

при ограничениях  $c, v \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}_+^r$  и (8.21)–(8.23).

Достаточно просто показать, что при максимизации целевой функции переменная  $H$  неограниченно растет с переменными  $v$ ,  $v_k$  и  $w_k$ , что не дает возможности получить решение. Возникает вопрос, как ограничить эти переменные. Рассмотрим более детально задачу оптимизации

$$H^* = \min \{v + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{V} - \underline{\mathbf{B}}\mathbf{W}\} \quad (8.25)$$

при ограничениях  $v \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}_+^r$  и

$$v + \mathbf{F}_j(\mathbf{V} - \mathbf{W}) \geq u_j(\lambda), \quad j = 1, \dots, m. \quad (8.26)$$

Эта задача линейного программирования имеет  $2r + 1$  переменных и  $2r + m$  ограничений, среди которых  $2r$  ограничений имеют вид:  $v_k \geq 0$  и  $w_k \geq 0$ ,  $k = 1, \dots, r$ . Отсюда следует, что, в соответствии со свойствами линейного программирования, среди  $2r + m$  неравенств должно быть по крайней мере  $2r + 1$  равенств. Эти равенства и ограничивают рост переменных  $v_k$ ,  $w_k$  и  $H$ . Так как мы не знаем, какие ограничения должны быть равенствами, то необходимо решить  $C_{2r+m}^{2r+1}$  (биномиальный коэффициент) задач линейного программирования, имеющих  $2r + 1$  равенств в ограничениях, и выбрать из всех решений этих задач то, которое максимизирует  $H^*$ . Однако не все оптимальные решения задачи (8.24) удовлетворяют ограничениям (8.25)–(8.26), т.е. оптимальное значение  $H$  в (8.24) может отличаться от  $H^*$  в (8.25)–(8.26) при одних и тех же оптимальных значениях  $\lambda$ . Поэтому после решения задачи (8.24) оптимальные значения  $\lambda$  подставляются в (8.26) и задача (8.25)–(8.26) должна быть решена. Если при этом  $H \neq H^*$ , то полученное оптимальное решение  $\lambda$  должно быть удалено из списка возможных решений. Если  $H = H^*$ , то полученное оптимальное решение  $\lambda$  является кандидатом на “конечное” оптимальное решение задачи (8.24). Отсюда следует, что  $C_{2r+m}^{2r+1}$  задач линейного программирования (8.25)–(8.26) должны быть дополнительно решены для определения согласованности оптимальных решений.

## Использование крайних точек для решения задачи

Предположим, что минимум в задаче (8.19) достигается в одной из крайних точек  $\pi^{(x)} \in \text{extr}(\mathcal{M})$  и максимум в задаче (8.20) достигается в одной из крайних точек  $\pi^{(z)} \in \text{extr}(\mathcal{M})$ . Введем новую переменную  $G = \min_{\pi \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}(\lambda)$ . Тогда (8.18) может быть переписана как (см. раздел 8.3.1)

$$\eta \cdot G + (1 - \eta) \overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} \mathbf{u}(\lambda) \rightarrow \max_{\lambda, G}$$

при ограничениях  $G \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \cdot \mathbf{1} = 1$  и

$$G \leq \sum_{j=1}^m \left( \sum_{s=1}^n u_{sj} \lambda_s \cdot \pi_j^{(x)} \right), \quad \pi^{(x)} \in \text{extr}(\mathcal{M}). \quad (8.27)$$

Заметим, что целевая функция определяется для крайних точек  $\pi^{(z)}$ , т.е.

$$\eta \cdot G + (1 - \eta) \sum_{j=1}^m \left( \sum_{s=1}^n u_{sj} \lambda_s \cdot \pi_j^{(z)} \right) \rightarrow \max_{\lambda}$$

Так как точно неизвестно, какая из точек  $\pi^{(z)}$  обеспечивает максимум целевой функции, то предлагается решить множество задач линейного программирования с одними и теми же ограничениями (8.27), но с различными целевыми функциями, каждая из которых определяется одной крайней точкой  $\pi^{(z)}$  из множества  $\text{extr}(\mathcal{M})$  и имеет оптимальное решение  $\lambda(z)$ , зависящее от соответствующей крайней точки  $\pi^{(z)}$ . В результате мы получим конечное множество решений  $\{\lambda(z)\}$  для всех крайних точек. “Конечное” оптимальное решение  $\lambda^*$  выбирается из множества  $\{\lambda(z)\}$  таким образом, чтобы соответствующая целевая функция была бы максимальной.

В итоге для принятия решений необходимо найти все крайние точки множества распределений  $\mathcal{M}$  и решить для каждой точки отдельно задачу линейного программирования.

**Пример 8.1.** Предположим, что эксперт предоставляет две оценки для трех состояний природы: среднее состояние находится между  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ; вероятность состояния  $\omega_3$  меньше 0.3. Эта информация формально может быть представлена в виде ограничений:

$$1 \leq \mathbb{E}_{\pi} \omega \leq 2, \quad 0 \leq \mathbb{E}_{\pi} I_{\{3\}}(\omega) \leq 0.3.$$

Таблица 8.3. Значения функции полезности

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
$a_1$	6	3	1
$a_2$	2	7	4

Здесь  $I_{\{3\}}(\omega)$  – индикаторная функция, принимающая значение 1, если  $\omega = \omega_3$ , а также 0 во всех остальных случаях. Используя введенные ограничения, исходные данные можно записать в виде:  $r = 2$ ,  $m = 3$ ,  $b_1 = 1$ ,  $\bar{b}_1 = 2$ ,  $b_2 = 0$ ,  $\bar{b}_2 = 0.3$ . Функция полезности показана в табл. 8.3.

Пусть  $\eta = 0.6$ . Задача оптимизации (8.24) записывается как

$$\eta \{c + c_1 - 2d_1 + 0c_2 - 0.3d_2\} + (1 - \eta)H \rightarrow \max_{c, v, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \lambda, H}$$

при ограничениях  $c, v, H \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}_+^2$  и

$$\begin{aligned} c + 1(c_1 - d_1) + 0(c_2 - d_2) &\leq 6\lambda_1 + 2\lambda_2, \\ c + 2(c_1 - d_1) + 0(c_2 - d_2) &\leq 3\lambda_1 + 7\lambda_2, \\ c + 3(c_1 - d_1) + 1(c_2 - d_2) &\leq 1\lambda_1 + 4\lambda_2, \\ v + 1(v_1 - w_1) + 0(v_2 - w_2) &\geq 6\lambda_1 + 2\lambda_2, \\ v + 2(v_1 - w_1) + 0(v_2 - w_2) &\geq 3\lambda_1 + 7\lambda_2, \\ v + 3(v_1 - w_1) + 1(v_2 - w_2) &\geq 1\lambda_1 + 4\lambda_2, \\ v + 2v_1 - 1w_1 + 0.3v_2 - 0w_2 &\geq H, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 1. \end{aligned}$$

Так как задача имеет 5 переменных  $v, v_1, w_1, v_2, w_2$  (для каждой подзадачи (8.25)–(8.26)), то число задач линейного программирования, которые должны быть решены, равно  $C_7^5 = 21$ . Заменяя символы “ $\geq$ ” в неравенствах, содержащих по крайней мере одну из переменных  $v, v_1, w_1, v_2, w_2$  символом “ $=$ ”, можно записать 21 задачу линейного программирования. Максимум целевой функции достигается, если  $v_1 = v_2 = 0$  и

$$\begin{aligned} v + 1(v_1 - w_1) + 0(v_2 - w_2) &= 6\lambda_1 + 2\lambda_2, \\ v + 2(v_1 - w_1) + 0(v_2 - w_2) &= 3\lambda_1 + 7\lambda_2, \\ v + 3(v_1 - w_1) + 1(v_2 - w_2) &= 1\lambda_1 + 4\lambda_2. \end{aligned}$$

При этом  $\lambda_1 = 8/9$ ,  $\lambda_2 = 1/9$ ,  $H = 50/9$  и значение целевой функции равно 4.289. Интересно отметить, что такое же решение имеет место для некоторых других комбинаций равенств в ограничениях. Для того чтобы доказать, что полученное решение является оптимальным, необходимо решить задачу оптимизации (8.25)–(8.26) с

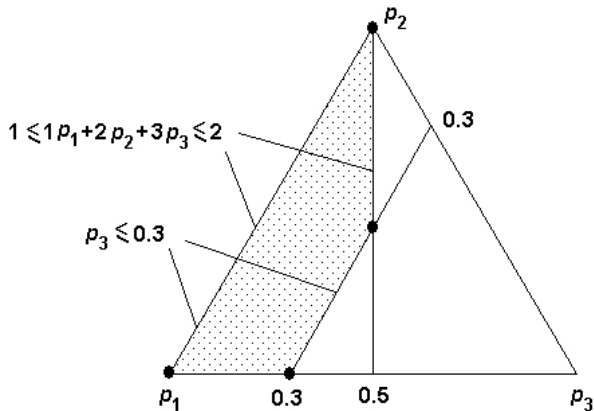


Рис. 8.1. Иллюстрация ограничений на симплексе вероятностей

$\lambda = (8/9, 1/9)$  и сравнить значения целевых функций  $H$  и  $H^*$ . В рассматриваемом случае задача (8.25)–(8.26) принимает вид

$$H^* = v + 2v_1 - 1w_1 + 0.3v_2 - 0w_2 \rightarrow \min_{v, v_k, w_k}$$

при ограничениях  $v \in \mathbb{R}, v_k, w_k \in \mathbb{R}_+$  и

$$\begin{aligned} v + 1(v_1 - w_1) + 0(v_2 - w_2) &\geq 6 \cdot \frac{8}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9}, \\ v + 2(v_1 - w_1) + 0(v_2 - w_2) &\geq 3 \cdot \frac{8}{9} + 7 \cdot \frac{1}{9}, \\ v + 3(v_1 - w_1) + 1(v_2 - w_2) &\geq 1 \cdot \frac{8}{9} + 4 \cdot \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Отсюда  $H^* = 50/9$  и  $H = H^*$ . Следовательно,  $\lambda = (8/9, 1/9)$  – оптимальная смешанная стратегия.

Найдем теперь оптимальную смешанную стратегию, используя крайние точки. Множество распределений  $\mathcal{M}$ , которое образовано двумя экспертными оценками, является частью единичного симплекса вероятностей размерности 3 и показано на рис. 8.1. Как видно из рис. 8.1, множество  $\mathcal{M}$  имеет 4 крайние точки  $(\pi_1^{(l)}, \pi_2^{(l)}, \pi_3^{(l)})$ ,  $l = 1, \dots, 4$ :

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0.7, 0, 0.3), (0.3, 0.4, 0.3).$$

Тогда следующую задачу оптимизации можно записать как

Таблица 8.4. Результаты расчета оптимального действия

$l$	$G$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$0.6\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda) + 0.4\overline{\mathbb{E}}_\pi \mathbf{u}(\lambda)$
1	31/9	8/9	1/9	4.289
2	22/7	2/7	5/7	4.229
3	303/80	5/8	3/8	3.787
4	303/80	5/8	3/8	3.787

$$\begin{aligned} & \eta G + (1 - \eta) \times \\ & \times \left( (6\pi_1^{(l)} + 3\pi_2^{(l)} + 1\pi_3^{(l)})\lambda_1 + (2\pi_1^{(l)} + 7\pi_2^{(l)} + 4\pi_3^{(l)})\lambda_2 \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \max_{\lambda_1, \lambda_2, G} \end{aligned}$$

при ограничениях  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$  и

$$\begin{aligned} (6 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0)\lambda_1 + (2 \cdot 1 + 7 \cdot 0 + 4 \cdot 0)\lambda_2 &\geq G, \\ (6 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0)\lambda_1 + (2 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 4 \cdot 0)\lambda_2 &\geq G, \\ (6 \cdot 0.7 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0.3)\lambda_1 + (2 \cdot 0.7 + 7 \cdot 0 + 4 \cdot 0.3)\lambda_2 &\geq G, \\ (6 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.3)\lambda_1 + (2 \cdot 0.3 + 7 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.3)\lambda_2 &\geq G, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 1. \end{aligned}$$

Решая 4 задачи линейного программирования, соответствующие всем значениям  $l = 1, \dots, 4$ , мы выбираем стратегию  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , которая обеспечивает максимум целевой функции. Результаты расчетов приведены в табл. 8.4. Как видно из числовых результатов, оптимальная стратегия –  $(\lambda_1, \lambda_2) = (8/9, 1/9)$ .

Выбор того или иного подхода для вычисления оптимальной смешанной стратегии при использовании параметра осторожности зависит от конкретной рассматриваемой задачи [119]. Очевидно, что сложность поиска оптимальной стратегии в основном определяется числом задач оптимизации, которые необходимо решить, и числом ограничений в каждой задаче. Если число крайних точек достаточно большое, то первый подход предпочтительнее по сравнению со вторым. Например, если имеющаяся информация о состояниях природы  $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$  ограничена несколькими точками, скажем  $r$  точками  $\omega_{l(1)}, \dots, \omega_{l(r)}$ ,  $r \ll m$ , неизвестного распределения вероятностей состояний, то число крайних точек равно  $l(1) \times (l(2) - l(1)) \times \dots \times (l(r) - l(r-1))$  и может быть достаточно

большим. В то же время, используя первый подход, необходимо решить  $C_{2r+m}^{2r+1}$  задач линейного программирования (8.24), имеющих  $2m + 2r + 2r$  ограничений и  $2r + 1$  переменных, а также  $C_{2r+m}^{2r+1}$  задач линейного программирования (8.25)–(8.26), имеющих  $m + 2r$  ограничений и  $2r + 1$  переменных. Отсюда следует, что первый подход предпочтительнее. Предположим теперь, что  $r$  близко к  $m$ , т.е. мы не знаем только небольшое число точек распределения вероятностей состояний природы. Очевидно, что число крайних точек в этом случае мало, но число ограничений в задачах оптимизации, соответствующих первому подходу, является достаточно большим. Тогда второй подход следует использовать при такой исходной информации для поиска оптимального решения.

Поиск оптимальной чистой стратегии для рассмотренного критерия не представляет существенных сложностей. Он сводится к тому, что для каждого действия  $a_k$  вычисляется нижняя  $\underline{E}_M \mathbf{u}_k$  и верхняя  $\overline{E}_M \mathbf{u}_k$  границы ожидаемой полезности. Нижняя граница вычисляется при помощи решения одной из двух задач линейного программирования (8.6) или (8.7)–(8.8). Верхняя граница определяется также решением одной из двух задач линейного программирования. При этом прямая задача оптимизации совпадает с задачей (8.6) при замене операции “min” на “max”. Двойственная задача оптимизации совпадает с задачей (8.25)–(8.26) при замене  $u_j(\lambda)$  на  $u_{kj}$ . Далее оптимальное действие определяется из условия (8.3).

## 8.4. Принятие решений с использованием обобщенной модели Дирихле

### 8.4.1. Общий подход к пессимистическому принятию решений

Предположим, что информация о состояниях природы представлена в виде вектора числа наблюдений каждого состояния  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$ , так что  $n_1 + \dots + n_m = N$ , т.е. мы наблюдаем  $i$ -е состояние  $n_i$  раз. Также предположим, что вероятности состояний природы  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m)$  являются слу-

чайными и имеют распределение Дирихле. Обозначим снова

$$\underline{\mathbf{u}}_r = \min_{i=1, \dots, m} u_{ri}, \quad \bar{\mathbf{u}}_r = \min_{i=1, \dots, m} u_{ri}.$$

Тогда, используя результаты, полученные в разделе 5.2 для обобщенной модели Дирихле, можно найти осторожные решения задачи для чистой и смешанной стратегий.

### *Чистая стратегия*

Рассмотрим сначала чистую стратегию принятия решений. В этом случае ожидаемая полезность  $\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_r$  действия с номером  $r$  является условным математическим ожиданием при условии, что вероятности состояний  $\pi_i$  имеют распределение Дирихле с плотностью  $p(\pi)$ . В дальнейшем зависимость ожидаемой полезности от параметра  $s$  распределения Дирихле будем обозначать  $\mathbb{E}_\pi^{(s)} \mathbf{u}_r$ . Используя формулу полной вероятности, можно найти безусловную ожидаемую полезность:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{(s)} \mathbf{u}_r &= \int_{S(1, m)} \sum_{i=1}^m (u_{ri} \pi_i) p(\pi) d\pi = \\ &= \sum_{i=1}^m u_{ri} \left( \int_{S(1, m)} \pi_i p(\pi) d\pi \right). \end{aligned}$$

Здесь  $S(1, m)$  – внутренняя область единичного симплекса размерности  $m$ . Заметим, что выражение в скобках есть математическое ожидание  $\mathbb{E}_p^{(s)} \pi_i$  вероятности  $\pi_i$  в соответствии с плотностью  $p(\pi)$ . Отсюда следует, что

$$\mathbb{E}^{(s)} \mathbf{u}_r = \sum_{i=1}^m u_{ri} \cdot \mathbb{E}_p^{(s)} \pi_i.$$

В то же время из свойств распределения Дирихле следует, что

$$\mathbb{E}_p^{(s)} \pi_i = \frac{n_i + s t_i}{N + s},$$

где  $t_i$  – априорное математическое ожидание  $\pi_i$ .

Тогда

$$\mathbb{E}^{(s)} \mathbf{u}_r = \sum_{i=1}^m u_{ri} \cdot \frac{n_i + st_i}{N + s}.$$

Собственно говоря, эту ожидаемую полезность можно было бы записать сразу, используя выражения для вероятностей событий в соответствии с распределением Дирихле. Из обобщенной модели Дирихле следует, что для вычисления нижней и верхней границ ожидаемой полезности необходимо решить следующие задачи линейного программирования:

$$\underline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}_r = \inf_{t \in S(1,m)} \mathbb{E}^{(s)} \mathbf{u}_r, \quad \overline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}_r = \sup_{t \in S(1,m)} \mathbb{E}^{(s)} \mathbf{u}_r.$$

Перепишем выражение для  $\mathbb{E}^{(s)} \mathbf{u}_r$  следующим образом:

$$\mathbb{E}^{(s)} \mathbf{u}_r = \frac{1}{N + s} \sum_{i=1}^m u_{ri} n_i + \frac{s}{N + s} \sum_{i=1}^m u_{ri} t_i.$$

Так как крайние точки симплекса имеют вид  $(1, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ , то оптимальное решение задач оптимизации следует искать среди этих точек. Тогда

$$\underline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}_r = \frac{1}{N + s} \left( \sum_{i=1}^m u_{ri} n_i + s \cdot \underline{\mathbf{u}}_r \right), \quad (8.28)$$

$$\overline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}_r = \frac{1}{N + s} \left( \sum_{i=1}^m u_{ri} n_i + s \cdot \overline{\mathbf{u}}_r \right). \quad (8.29)$$

В частности, если  $N = 0$ , т.е. при отсутствии какой-либо вероятностной информации о состояниях природы, то имеем

$$\underline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}_r = \underline{\mathbf{u}}_r, \quad \overline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}_r = \overline{\mathbf{u}}_r.$$

Это соответствует критерию Вальда и оптимистическому критерию соответственно, а нижняя и верхняя функции полезности не зависят от  $s$ . Если  $N \rightarrow \infty$  и  $n_i = \pi_i N$ ,  $i = 1, \dots, m$ , т.е. имеется достаточное количество статистических данных о состояниях природы, то получаем

$$\underline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}_r = \overline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}_r = \sum_{i=1}^m u_{ri} \pi_i.$$



Это совпадает с критерием максимума ожидаемой полезности.

Пессимистическое принятие решений подразумевает, что действие  $k$  является оптимальным, если для всех  $r \in \{1, \dots, n\}$  выполняется неравенство (8.1). Таким образом, оптимальное действие определяется максимальной нижней границей ожидаемой полезности, т.е. поиском наибольшего значения целевой функции из  $n$  возможных значений

$$\frac{1}{N + s} \left( \sum_{i=1}^m u_{ri} n_i + s \cdot \underline{\mathbf{u}}_r \right) \rightarrow \max_{r=1, \dots, n} .$$

Перепишем данную задачу в следующем виде:

$$\left( \gamma \sum_{i=1}^m u_{ri} \pi_i + (1 - \gamma) \underline{\mathbf{u}}_r \right) \rightarrow \max_{r=1, \dots, n} , \quad (8.30)$$

где  $\pi_i = n_i/N$  и  $\gamma = N/(N + s)$ ,  $\gamma \in [0, 1]$ .

Заметим, что полученная задача принятия решения определяется линейной комбинацией критерия ожидаемой полезности при известном распределении вероятностей состояний природы и критерия максимина. При этом  $\gamma \rightarrow 1$  при  $N \rightarrow \infty$  и  $\gamma = 0$  при  $N = 0$ , т.е. чем больше выборка, тем больше доверие к критерию ожидаемой полезности, что интуитивно является справедливым.

### *Смешанная стратегия*

Рассмотрим задачу принятия решений при тех же исходных данных, но при условии выбора оптимальной смешанной стратегии  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Тогда аналогично чистой стратегии ожидаемая полезность  $\mathbb{E}^{(s)} \mathbf{u}(\lambda)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{(s)} \mathbf{u}(\lambda) &= \int_{S(1, m)} \sum_{i=1}^m (u(\lambda, \omega_i) \cdot \pi_i) p(\pi) d\pi = \\ &= \sum_{i=1}^m u(\lambda, \omega_i) \cdot \mathbb{E}_p^{(s)} \pi_i = \sum_{i=1}^m u(\lambda, \omega_i) \cdot \frac{n_i + s t_i}{N + s} . \end{aligned}$$

Здесь  $u(\lambda, \omega_i) = \sum_{r=1}^n \lambda_r u_{ri}$ . Используя обобщенную модель Дирихле для вычисления нижней и верхней границ ожидаемой полезности, необходимо решить следующие задачи линейного программирования:

$$\underline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}(\lambda) = \inf_{t \in S(1, m)} \mathbb{E}^{(s)} \mathbf{u}(\lambda), \quad \overline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}(\lambda) = \sup_{t \in S(1, m)} \mathbb{E}^{(s)} \mathbf{u}(\lambda).$$

Пессимистическое принятие решений подразумевает, что действие  $\lambda^*$  является оптимальным, если для всех  $\lambda$  выполняется условие (8.2). Тогда оптимальное действие  $\lambda^*$  можно получить максимизацией нижней ожидаемой полезности  $\underline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}(\lambda)$  при условиях  $\lambda \cdot \mathbf{1} = 1$ ,  $\lambda_r \geq 0$ ,  $r = 1, \dots, n$ . Другими словами, необходимо решить следующую задачу оптимизации:

$$\inf_{t \in S(1, m)} \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^n u_{ri} \lambda_r \cdot \frac{n_i + st_i}{N + s} \rightarrow \max_{\lambda} \quad (8.31)$$

при ограничениях  $\lambda \cdot \mathbf{1} = 1$ ,  $\lambda_r \geq 0$ ,  $r = 1, \dots, n$ .

Алгоритм решения данной задачи аналогичен алгоритму, рассмотренному ранее в разделе 8.3.1. Поэтому для решения данной нелинейной задачи оптимизации введем новую переменную  $G = \inf_{t \in S(1, k)} \mathbb{E}^{(s)} \mathbf{u}(\lambda)$ . Тогда задача (8.31) переписывается в виде задачи линейного программирования, но с бесконечно большим числом ограничений

$$\max_{\lambda, G} G \quad (8.32)$$

при ограничениях  $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $G \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \cdot \mathbf{1} = 1$ ,

$$G \leq \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^n u_{ri} \lambda_r \cdot \frac{n_i + st_i}{N + s}, \quad t \in S(1, m). \quad (8.33)$$

Так как оптимальное решение задачи следует искать среди крайних точек симплекса  $S(1, m)$ , то число ограничений можно ограничить и рассматривать только те вектора  $t$ , которые принадлежат множеству  $\text{extr}(S(1, m))$  (множество крайних точек симплекса  $S(1, m)$ )

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1). \quad (8.34)$$

Отсюда ограничения (8.33) принимают вид

$$G \leq \sum_{r=1}^n \left( \lambda_r \sum_{i=1}^m u_{ri} \frac{n_i + s \cdot \mathbf{1}_j(i)}{N + s} \right), \quad j = 1, \dots, m.$$

Здесь  $\mathbf{1}_j(i) = 1$ , если  $j = i$ , иначе  $\mathbf{1}_j(i) = 0$ . Последнее ограничение можно упростить

$$G \leq \frac{1}{N + s} \sum_{r=1}^n \lambda_r \left( s \cdot u_{rj} + \sum_{i=1}^m u_{ri} n_i \right), \quad j \leq m. \quad (8.35)$$

В результате мы получили достаточно простую задачу линейного программирования с целевой функцией (8.32) и ограничениями (8.35) и  $\lambda \cdot \mathbf{1} = 1$ .

В частном случае, когда ни разу не наблюдались состояния природы, т.е.  $n_i = N = 0$ , ограничения (8.35) принимают вид

$$G \leq \sum_{r=1}^n \lambda_r u_{rj}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Если имеется выборка большого объема  $N \rightarrow \infty$  и вероятности состояний природы  $\pi_i = n_i/N$  известны точно, то, как уже было показано ранее, оптимальную смешанную стратегию следует искать среди множества чистых стратегий.

Из (8.30) можно заметить, что целевая функция представляет из себя смесь двух критериев: 1 – критерия максимума ожидаемой полезности с вероятностями  $\pi(\{\omega_i\})$ , которые заменены соответствующими относительными частотами  $n_i/N$ , и 2 – критерия Вальда. Веса  $N/(N + s)$  и  $s/(N + s)$  непосредственно связаны с имеющейся неопределенностью и зависят от параметра  $s$  и размера выборки  $N$ . Поэтому, с одной стороны, когда  $N = 0$ , т.е. перед получением каких-либо наблюдений состояний природы, пессимистический критерий Вальда используется. С другой стороны, когда размер выборки стремится к бесконечности, т.е. когда имеется достаточно статистических данных для того, чтобы оценить вероятности  $\pi(\cdot)$  с очень малой дисперсией, критерий ожидаемой полезности используется. С этой точки зрения выражение (8.30)

можно рассматривать как критерий Ходжа–Лемана [48], который был предложен в теории принятия решений в качестве компромисса между байесовским и минимаксным подходами.

В то же время детальный анализ выражения (8.30) показывает возможный нежелательный эффект. Когда функция полезности такова, что значения  $\underline{\mathbf{u}}_r$  (минимальные значения полезности для каждой альтернативы) одинаковы для всех альтернатив, то второе слагаемое в скобках выражения (8.30) одинаково для всех  $r = 1, \dots, n$ . Тогда максимум определяется использованием только отношения  $\sum u_{ri} \cdot n_i / (N + s)$ . Но в этом случае выбор оптимальной альтернативы аналогичен выбору при элементарном частотном подходе, где вероятности  $\pi(\cdot)$  заменяются вектором наблюдаемых относительных частот. Следуя этому, можно заметить, что в принципе такая ситуация может быть всегда создана добавлением “плохого” состояния природы  $\omega_0$  (например, “крах экономики” в рассматриваемом ранее примере об инвестициях), которое имеет такую постоянную полезность  $u_0$  для всех альтернатив, что  $u_0 < \min_r \underline{\mathbf{u}}_r$ . Это означает, что (как и в минимаксном подходе) особое внимание должно быть уделено выбору состояний природы, что в некотором смысле снижает влияние одного из важных преимуществ обобщенной модели Дирихле, *принципа инвариантности* [132], согласно которому нижняя и верхняя вероятность события не зависит от множества элементарных исходов. Эта особенность не позволяет в полной мере сделать предлагаемый подход к принятию решений с использованием обобщенной модели Дирихле достаточно универсальным.

#### 8.4.2. Принятие решений с параметром осторожности

##### *Чистая стратегия*

Принятие решений с использованием параметра осторожности подразумевает, что действие  $k$  является оптимальным, если для всех  $r \in \{1, \dots, n\}$  выполняется условие (8.3). При этом  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} \mathbf{u}_k$  и  $\overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} \mathbf{u}_r$  заменяются здесь на  $\underline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}_k$  и  $\overline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}_r$  соответственно. При использовании оптимальной чистой стра-

тегии задача принятия решений практически не отличается от задачи пессимистического принятия решений. Используя (8.28)–(8.29), аналогичным образом можно записать задачу оптимизации

$$\frac{\eta}{N+s} \left( \sum_{i=1}^m u_{ri} n_i + s \cdot \underline{\mathbf{u}}_r \right) + \frac{(1-\eta)}{N+s} \left( \sum_{i=1}^m u_{ri} n_i + s \cdot \bar{\mathbf{u}}_r \right) \rightarrow \max_{r=1, \dots, n} .$$

Заметим, что последнее выражение может быть упрощено

$$\frac{1}{N+s} \sum_{i=1}^m u_{ri} n_i + \frac{s}{N+s} (\eta \cdot \underline{\mathbf{u}}_r + (1-\eta) \bar{\mathbf{u}}_r) \rightarrow \max_{r=1, \dots, n} .$$

Параметр осторожности в данном случае выступает в роли параметра пессимизма Гурвица. В частном случае, когда ни разу не наблюдались состояния природы, т.е.  $n_i = N = 0$ , получаем

$$\eta \cdot \underline{\mathbf{u}}_r + (1-\eta) \bar{\mathbf{u}}_r \rightarrow \max_{r=1, \dots, n} ,$$

что соответствует критерию Гурвица. Если  $N \rightarrow \infty$ , то получаем критерий максимума ожидаемой полезности при точных вероятностях состояний

$$\sum_{i=1}^m u_{ri} \pi_i \rightarrow \max_{r=1, \dots, n} .$$

### *Смешанная стратегия*

Действие  $\lambda^*$  является оптимальным, если для всех  $\lambda$  выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \eta \underline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}(\lambda^*) + (1-\eta) \bar{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}(\lambda^*) &\geq \\ &\geq \eta \underline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}(\lambda) + (1-\eta) \bar{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}(\lambda). \end{aligned} \quad (8.36)$$

Обозначим  $H = \eta \underline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}(\lambda^*) + (1-\eta) \bar{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}(\lambda^*)$ . Тогда для вычисления оптимальной смешанной стратегии  $\lambda^*$  необходимо решить следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned}
H = & \eta \inf_{t^{(1)} \in S(1,k)} \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^n u_{ri} \lambda_r \frac{n_i + st_i^{(1)}}{N + s} + \\
& + (1 - \eta) \sup_{t^{(2)} \in S(1,k)} \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^n u_{ri} \lambda_r \frac{n_i + st_i^{(2)}}{N + s} \rightarrow \max_{\lambda} \quad (8.37)
\end{aligned}$$

при ограничениях  $\lambda \cdot \mathbf{1} = 1$  и  $\lambda_r \geq 0$ .

Здесь  $t^{(1)}$  и  $t^{(2)}$  – параметры обобщенной модели Дирихле, обеспечивающие нижнюю и верхнюю границы для ожидаемой полезности соответственно. Введем новую переменную

$$G = \inf_{t^{(1)} \in S(1,k)} \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^n u_{ri} \lambda_r \frac{n_i + st_i^{(1)}}{N + s}.$$

Тогда задачу (8.37) можно переписать так:

$$H = \eta G + (1 - \eta) \sup_{t^{(2)} \in S(1,k)} \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^n u_{ri} \lambda_r \frac{n_i + st_i^{(2)}}{N + s} \rightarrow \max_{\lambda, G}$$

при ограничениях (8.35) и  $\lambda \cdot \mathbf{1} = 1$ ,  $\lambda_r \geq 0$ .

Рассмотрим множества крайних точек симплекса вероятностей, образованного всеми точками  $t^{(2)}$ . Так как максимум по всем точкам  $t^{(2)} \in S(1, m)$  достигается в одной из точек (8.34), то второе слагаемое целевой функции можно заменить на

$$\begin{aligned}
(1 - \eta) \max_{x=1, \dots, m} \sum_{r=1}^n \left( \lambda_r \sum_{i=1}^m u_{ri} \frac{n_i + s \cdot \mathbf{1}_x(i)}{N + s} \right) = \\
= \frac{1 - \eta}{N + s} \max_{x=1, \dots, m} \sum_{r=1}^n \lambda_r \left( s \cdot u_{rx} + \sum_{i=1}^m u_{ri} n_i \right).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
H = & \eta G + \frac{1 - \eta}{N + s} \sum_{r=1}^n \lambda_r \left( s \cdot u_{rx} + \sum_{i=1}^m u_{ri} n_i \right) \\
\rightarrow & \max_{\lambda, G, x=1, \dots, m}.
\end{aligned}$$

Таким образом, для поиска оптимальной смешанной стратегии необходимо решить  $m$  задач линейного программирования для каждого значения  $x$  и выбрать то решение, которое обеспечивает максимум целевой функции

$$H(x) = \eta G + \frac{1 - \eta}{N + s} \sum_{r=1}^n \left( \lambda_r(x) \left( s \cdot u_{rx} + \sum_{i=1}^m u_{ri} n_i \right) \right) \\ \rightarrow \max_{\lambda(x), G}$$

при ограничениях (8.35) и  $\lambda(x) \cdot \mathbf{1} = 1$ ,  $\lambda_r(x) \geq 0$ .

Здесь  $\lambda(x)$  – рандомизированное действие, зависящее от  $x$ . Оптимальное действие  $\lambda^*$  определяется как  $\lambda^* = \lambda^*(x_0)$  при

$$x_0 = \arg \max_{x=1, \dots, m} H(x).$$

В частном случае, когда ни разу не наблюдались состояния природы, т.е. при  $n_i = N = 0$ , имеем задачу оптимизации

$$H(x) = \eta G + (1 - \eta) \sum_{r=1}^n \lambda_r(x) u_{rx} \rightarrow \max_{\lambda(x), G}$$

при ограничениях

$$G \leq \sum_{r=1}^n \lambda_r(x) \cdot u_{rj}, \quad j = 1, \dots, m, \quad \lambda(x) \cdot \mathbf{1} = 1.$$

Если  $N \rightarrow \infty$ , то

$$H(x) = \eta G + (1 - \eta) \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^m u_{ri} \pi_i \lambda_r(x) \rightarrow \max_{\lambda(x), G}$$

при ограничениях

$$G \leq \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^m u_{ri} \pi_i \lambda_r(x), \quad j = 1, \dots, m, \quad \lambda(x) \cdot \mathbf{1} = 1.$$

Ограничения в данном случае не зависят от  $j$  и  $H$  не зависит от  $x$ . Отсюда следует

$$H = \eta \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^m u_{ri} \pi_i \lambda_r + (1 - \eta) \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^m u_{ri} \pi_i \lambda_r = \\ = \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^m u_{ri} \pi_i \lambda_r \rightarrow \max_{\lambda}$$

Таблица 8.5. Значения функции полезности

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$
стратегия 1	30	19	14	10
стратегия 2	21	18	16	21
стратегия 3	5	14	20	25

при ограничениях  $\lambda \cdot \mathbf{1} = 1$ .

Таким образом, получена обычная задача принятия решений с критерием максимума ожидаемой полезности и оптимальную смешанную стратегию следует искать среди множества чистых стратегий.

Из приведенных выводов видно, что метод решения аналогичен уже рассмотренному ранее подходу для поиска оптимального рандомизированного действия в задаче принятия решений при неполной информации (см. раздел 8.3). В то же время особенности обобщенной модели Дирихле и полученных соответствующим образом вероятностей состояний природы позволяют существенно упростить оптимизационные задачи.

**Пример 8.2.** Рассмотрим в качестве примера задачу выбора оптимальной стратегии ремонта и восстановления отказавшего оборудования из трех возможных стратегий. Имеется 40 единиц оборудования, которые могут выходить из строя. Определим 4 состояния природы в зависимости от количества отказавших единиц оборудования за определенный период времени:  $\omega_1$  – отказали 0, ..., 10 единиц;  $\omega_2$  – отказали 11, ..., 20 единиц;  $\omega_3$  – отказали 21, ..., 30 единиц;  $\omega_4$  – отказали 31, ..., 40 единиц. Функция полезности показана в табл. 8.5.

Сначала предположим, что известно точное распределение вероятностей состояний:  $\pi_1 = 0.22$ ,  $\pi_2 = 0.43$ ,  $\pi_3 = 0.29$ ,  $\pi_4 = 0.06$  (биномиальное распределение с вероятностью одного события 0.4). Тогда для  $\eta = 1$  следующая задача линейного программирования должна быть решена для определения оптимальной смешанной стратегии:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda} \mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}(\lambda) &= \max_{\lambda} \sum_{r=1}^3 \left( \lambda_r \sum_{j=1}^4 u_{rj} \pi_j \right) = \\ &= \max_{\lambda} (19.43\lambda_1 + 18.26\lambda_2 + 14.42\lambda_3), \end{aligned}$$



при ограничениях  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ .

Решение этой задачи –  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ , т.е. оптимальная стратегия – первая. При этом ожидаемая полезность равна 19.43.

Теперь предположим, что нет вообще никакой информации о состояниях природы. Используя пессимистическое принятие решений, получаем:

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^3, G \in \mathbb{R}} G$$

при ограничениях  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ,

$$\begin{aligned} G &\leq 30\lambda_1 + 21\lambda_2 + 5\lambda_3, \\ G &\leq 19\lambda_1 + 18\lambda_2 + 14\lambda_3, \\ G &\leq 14\lambda_1 + 16\lambda_2 + 20\lambda_3, \\ G &\leq 10\lambda_1 + 21\lambda_2 + 25\lambda_3. \end{aligned}$$

Оптимальная смешанная стратегия –  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.75, \lambda_3 = 0.25$ , а ожидаемая полезность равна 17.

Полученные результаты показывают, что полная информация о распределении вероятностей состояний природы позволяет найти решение с большей ожидаемой полезностью.

Предположим, что получены наблюдения о появлении того или иного состояния природы:  $n_1 = 0, n_2 = 2, n_3 = 1, n_4 = 0$  (эти числа сгенерированы при помощи датчика случайных чисел в соответствии с точным распределением вероятностей  $\pi$ ). Тогда задача линейного программирования для вычисления оптимальной смешанной стратегии имеет вид:

$$\max_{\lambda, G} G$$

при ограничениях  $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ ,

$$\begin{aligned} G &\leq \frac{1}{3+s} (30s + 52) \lambda_1 + (21s + 52) \lambda_2 + (5s + 48) \lambda_3, \\ G &\leq \frac{1}{3+s} (14 + 19(2+s)) \lambda_1 + \\ &\quad + (16 + 18(2+s)) \lambda_2 + (20 + 14(2+s)) \lambda_3, \\ G &\leq \frac{1}{3+s} (38 + 14(1+s)) \lambda_1 + \\ &\quad + (36 + 16(1+s)) \lambda_2 + (28 + 20(1+s)) \lambda_3, \\ G &\leq \frac{1}{3+s} (52 + 10s) \lambda_1 + (52 + 21s) \lambda_2 + (48 + 25s) \lambda_3. \end{aligned}$$

Таблица 8.6. Оптимальные смешанные стратегии

$N$	$(n_1, n_2, n_3, n_4)$	$s$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$G$
0	(0, 0, 0, 0)	1	0	0.75	0.25	17
		0	1	0	0	17.333
3	(0, 2, 1, 0)	1	0	1	0	17
		2	0	0.75	0.25	17
		0	1	0	0	22.4
5	(2, 2, 1, 0)	1	1	0	0	20.333
		2	0.556	0.444	0	19.111
		0	1	0	0	19.3
10	(2, 5, 2, 1)	1	0.556	0.444	0	18.576
		2	0.556	0.444	0	18.27
		0	1	0	0	19.4
30	(6, 14, 9, 1)	1	1	0	0	19.097
		2	1	0	0	18.813

Результаты решения задачи для  $s = 0, 1, 2$  показаны в табл. 8.6, где также содержатся результаты расчетов после получения дополнительных статистических данных, т.е. при увеличении значения  $N$ .

## 8.5. Нечеткая модель принятия решений

### 8.5.1. Нечеткое множество ожидаемой полезности

Одним из открытых вопросов реализации методов принятия решений, основанных на использовании обобщенной модели Дирихле, является вопрос выбора значения параметра осторожности  $s$ . С одной стороны, малое значение параметра приводит к повышению риска принятия ошибочного решения. С другой стороны, увеличение  $s$  делает принятие решения слишком пессимистическим. Уолли [132] и Бернад [9] предложили использовать два значения, 1 и 2, параметра  $s$ . Однако этот выбор также не имеет строгого математического обоснования. Более того, невозможно определить значение параметра  $s$  априори без анализа конкретной ситуации принятия решений. Для того чтобы избежать сложностей, связанных с выбором значения  $s$ , предлагается метод [117] представления ожидаемой полезности в виде нечеткого числа [155] и

поиска оптимального действия в условиях нечетких исходных данных.

Заметим, что интервалы ожидаемой полезности для каждой альтернативы  $[\underline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}_r, \overline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}_r]$  при различных значениях параметра  $s$  обобщенной модели Дирихле образуют множество вложенных интервалов, т.е. для любых неотрицательных  $x$  и  $y$  из условия  $x \leq y$  следует

$$[\underline{\mathbb{E}}^{(x)} \mathbf{u}_r, \overline{\mathbb{E}}^{(x)} \mathbf{u}_r] \subseteq [\underline{\mathbb{E}}^{(y)} \mathbf{u}_r, \overline{\mathbb{E}}^{(y)} \mathbf{u}_r].$$

При этом, если  $s \rightarrow 0$ , то  $\underline{\mathbb{E}}^{(0)} \mathbf{u}_r = \overline{\mathbb{E}}^{(0)} \mathbf{u}_r$ . Если  $s \rightarrow \infty$ , то

$$\underline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}_r = \underline{\mathbf{u}}_r, \overline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}_r = \overline{\mathbf{u}}_r.$$

Рассмотрим функцию  $\mu : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  переменной  $s$ , удовлетворяющую следующим свойствам:  $\mu(0) = 1$ ,  $\mu(\infty) = 0$  и  $\mu(s)$  – невозрастающая функция от  $s$ . Примерами таких функций являются  $\mu(s) = \exp(-s)$ ,  $\mu(s) = (1 + s)^{-1}$ . Заменяя параметр  $s$  в выражениях для нижней и верхней границ ожидаемой полезности обратной функцией  $\mu^{-1}(s)$ , получаем множество вложенных интервалов, каждый из которых характеризуется вещественным числом  $\mu \in [0, 1]$ . Это множество можно рассматривать, как нечеткое множество  $\tilde{\mathbb{E}} \mathbf{u}_r$  ожидаемой полезности альтернативы  $a_r$  с функцией принадлежности  $\mu$  или просто нечеткая ожидаемая полезность [160, 167]. Тогда для рассматриваемой задачи принятия решения запишем новый критерий, используемый в задачах нечеткого принятия решений. Действие  $a_k$  является оптимальным, если для всех  $r = 1, \dots, n$  выполняется неравенство  $\tilde{\mathbb{E}} \mathbf{u}_k \geq \tilde{\mathbb{E}} \mathbf{u}_r$ .

Очевидно, что использование данного критерия непосредственно связано с вопросом сравнения нечетких множеств. Существует большое количество методов сравнения или ранжирования нечетких множеств, большинство из которых основано на преобразовании нечеткого множества в число, называемое индексом ранжирования [155].

Для решения рассматриваемой задачи принятия решений мы используем индекс, учитывающий обе (левую и правую) ветви функции принадлежности для сравнения. При этом сте-

пень влияния ветвей регулируется так называемым параметром пессимизма  $\eta$ . В обозначениях, введенных для рассматриваемой задачи принятия решений, индекс сравнения имеет вид

$$R_r = \int_0^1 \left( \eta \underline{\mathbb{E}}^{(\mu)} \mathbf{u}_r + (1 - \eta) \overline{\mathbb{E}}^{(\mu)} \mathbf{u}_r \right) d\mu. \quad (8.38)$$

Здесь  $\eta \in [0, 1]$ . Фактически данный индекс сравнения есть весовая сумма площадей под левой и правой частями графика функции принадлежности. Он может рассматриваться как “смещенный” центр тяжести нечеткого числа, где смещение регулируется параметром  $\eta$ .

Теперь критерий принятия решений можно переписать следующим образом. Действие  $a_k$  является оптимальным, если для всех  $r = 1, \dots, n$  выполняется неравенство  $R_k \geq R_r$ .

Следует отметить, что индекс  $R_r$  можно интерпретировать в терминах теории вероятностей. Рассматривая  $\mu$  как функцию распределения возможностей [155], можно говорить о том, что ветви функции принадлежности нечеткого числа формируют множество распределений вероятностей [133, 155] с нижней  $\underline{F}(x)$  и верхней  $\overline{F}(x)$  функциями распределения вероятностей случайной переменной  $X$ , определяемых как

$$\underline{F}(x) = \begin{cases} 0, & x = \underline{\mathbb{E}}^{(\mu)} \mathbf{u}_r \\ 1 - \mu(x), & x = \overline{\mathbb{E}}^{(\mu)} \mathbf{u}_r \end{cases},$$

$$\overline{F}(x) = \begin{cases} \mu(x), & x = \underline{\mathbb{E}}^{(\mu)} \mathbf{u}_r \\ 1, & x = \overline{\mathbb{E}}^{(\mu)} \mathbf{u}_r \end{cases}.$$

Нижнее  $\underline{\mathbb{E}}X$  и верхнее  $\overline{\mathbb{E}}X$  математические ожидания случайной переменной  $X$  тогда имеют вид

$$\underline{\mathbb{E}}X = \int_{-\infty}^{\infty} d\overline{F}(x), \quad \overline{\mathbb{E}}X = \int_{-\infty}^{\infty} d\underline{F}(x).$$

Однако те же самые математические ожидания могут быть представлены в виде следующих интегралов:

$$\underline{\mathbb{E}}X = \int_0^1 \underline{\mathbb{E}}^{(\mu)} \mathbf{u}_r d\mu, \quad \overline{\mathbb{E}}X = \int_0^1 \overline{\mathbb{E}}^{(\mu)} \mathbf{u}_r d\mu.$$

Отсюда следует, что  $R_r = \eta \underline{\mathbb{E}}X + (1 - \eta) \overline{\mathbb{E}}X$ . С этой точки зрения параметр  $\eta$  есть не что иное, как *параметр осторожности* [73, 138], используемый в задачах принятия решений при неполной информации о вероятностях состояний природы. Таким образом, имеет место интересная связь между параметром пессимизма для расчета индекса ранжирования нечетких чисел и параметром осторожности в принятии решений. Это одна из причин, почему именно такой индекс ранжирования нечетких чисел используется в рассматриваемой задаче принятия решений.

Упростим выражение (8.38). Для этого обозначим

$$\Psi(s) = \eta \underline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}_r + (1 - \eta) \overline{\mathbb{E}}^{(s)} \mathbf{u}_r.$$

Тогда

$$R_r = - \int_0^\infty \Psi(s) d\mu(s).$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} R_r &= \Psi(0)\mu(0) - \Psi(\infty)\mu(\infty) + \int_0^\infty \mu(s) d\Psi(s) = \\ &= \Psi(0) + \int_0^\infty \mu(s) d\Psi(s). \end{aligned}$$

Подставляя (8.28)–(8.29) в последнее выражение и упрощая его, получаем:

$$R_r = A_r + ND_r \int_0^\infty \mu(s)(N + s)^{-2} ds, \quad (8.39)$$

где

$$D_r = -A_r + G_r, \quad A_r = N^{-1} \sum_{i=1}^m u_{ri} n_i,$$

$$G_r = \eta \cdot \underline{\mathbf{u}}_r + (1 - \eta) \overline{\mathbf{u}}_r.$$

Здесь  $A_r$  – ожидаемая полезность  $r$ -го действия при условии наблюдений  $n_1, \dots, n_m$ ;  $G_r$  – ожидаемая полезность в соответствии с критерием Гурвица с параметром пессимизма  $\eta$ ;  $D_r$  может рассматриваться как некоторая коррекция ожидаемой

полезности  $G_r$ , учитывающая возможный недостаток статистических данных для использования стандартной процедуры вычисления вероятностей состояний природы.

Используя теорему о среднем значении интеграла, (8.39) может быть записана в виде

$$R_r = A_r + ND_r\mu(\gamma) \int_0^\infty (N + s)^{-2} ds = A_r + D_r\mu(\gamma),$$

где  $\gamma \in [0, \infty)$ .

Отсюда

$$R_r = A_r \cdot (1 - \mu(\gamma)) + G_r \cdot \mu(\gamma).$$

Из последнего выражения следует, что индекс  $R_r$  как критерий принятия решений, является линейной комбинацией критерия Гурвица и ожидаемой полезности при предположении, что вероятности состояний являются относительными частотами, т.е.  $\pi_i = n_i/N$ .

### 8.5.2. Нечеткая робастная модель

Рассмотрим вероятности состояний природы в рамках робастных моделей  $\varepsilon$ -засорения [181]. Описание модели приведено в разделе 5.2. В рассматриваемой задаче модель  $\varepsilon$ -засорения – это класс всех вероятностей (распределений), которые для фиксированных  $\varepsilon \in (0, 1)$  и  $\pi_i$  представляют собой множество  $\mathcal{M}(\varepsilon) = \{(1 - \varepsilon)\pi_i + \varepsilon q_i\}$ , где  $q_i$  – произвольные вероятности, удовлетворяющие условию  $q_1 + \dots + q_m = 1$ . Заметим, что множества  $\mathcal{M}(\varepsilon)$  при различных  $\varepsilon$  являются вложенными, т.е.  $\mathcal{M}(\varepsilon_1) \subseteq \mathcal{M}(\varepsilon_2)$  при  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ . Поэтому Уолли [135] предложил так называемую нечеткую модель засорения. В соответствии с этой моделью для любого  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  класс  $\mathcal{M}(\varepsilon)$  есть множество всех вероятностей с нижней границей  $(1 - \varepsilon)\pi_i$  и верхней границей  $(1 - \varepsilon)\pi_i + \varepsilon$ .

Найдем нижнюю и верхнюю ожидаемые полезности, полученные на основе распределений из множества  $\mathcal{M}(\varepsilon)$ . Для фиксированных  $\varepsilon$  и  $q_i$ , ожидаемая полезность имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{(\varepsilon)} \mathbf{u}_r &= \sum_{i=1}^m u_{ri} ((1 - \varepsilon)\pi_i + \varepsilon q_i) = \\ &= (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^m u_{ri} \pi_i + \varepsilon \sum_{i=1}^m u_{ri} q_i.\end{aligned}$$

Минимизируя и максимизируя  $\mathbb{E}^{(\varepsilon)} \mathbf{u}_r$  по всем возможным распределениям  $(q_1, \dots, q_m)$  и учитывая тот факт, что оптимальные решения могут быть найдены среди крайних точек единичного симплекса вероятностей  $S(1, m)$  размерности  $m$ , содержащего все распределения  $(q_1, \dots, q_m)$ , получим:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbb{E}}^{(\varepsilon)} \mathbf{u}_r &= (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^m u_{ri} \pi_i + \varepsilon \min_{q_i} \sum_{i=1}^m u_{ri} q_i = \\ &= (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^m u_{ri} \pi_i + \varepsilon \cdot \underline{\mathbf{u}}_r,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{E}}^{(\varepsilon)} \mathbf{u}_r &= (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^m u_{ri} \pi_i + \varepsilon \max_{q_i} \sum_{i=1}^m u_{ri} q_i = \\ &= (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^m u_{ri} \pi_i + \varepsilon \cdot \overline{\mathbf{u}}_r.\end{aligned}$$

Интервалы  $[\underline{\mathbb{E}}^{(\varepsilon)} \mathbf{u}_r, \overline{\mathbb{E}}^{(\varepsilon)} \mathbf{u}_r]$  при различных  $\varepsilon$  являются вложенными. Следовательно, они образуют нечеткую ожидаемую полезность  $\tilde{\mathbb{E}} \mathbf{u}_r$  с функцией принадлежности  $\mu(\varepsilon)$ , такой что  $\mu(1) = 0$  и  $\mu(0) = 1$ , например  $\mu(\varepsilon) = 1 - \varepsilon$ .

Отметим, что обобщенная модель Дирихле имеет те же самые нижнюю и верхнюю вероятности, что и робастная модель  $\varepsilon$ -засорения при  $\pi_i = n_i/N$  и  $\varepsilon = s/(N + s)$ . То же самое можно сказать о нижней и верхней ожидаемых полезностях. Таким образом, нечеткую модель принятия решений можно рассматривать с двух точек зрения и соответственно давать различную интерпретацию результатов.

### 8.5.3. Частный случай функции принадлежности

Рассмотрим один частный случай зависимости  $\mu(s)$  в задаче принятия решений. Пусть  $\mu(s) = (1+s)^{-1}$ . Отсюда следует, что  $s = \mu^{-1} - 1$ . Подставляя эту функцию в (8.39) и интегрируя, получаем:

$$\begin{aligned} R_r &= \frac{-\ln N + N - 1}{(N - 1)^2} \cdot A_r N + \frac{-N + 1 + N \ln N}{(N - 1)^2} \cdot G_r = \\ &= \frac{-\ln N + N - 1}{(N - 1)^2} \sum_{i=1}^m u_{ri} n_i + \\ &+ \frac{-N + 1 + N \ln N}{(N - 1)^2} (\eta \cdot \underline{u}_r + (1 - \eta) \bar{\underline{u}}_r). \end{aligned}$$

В результате имеем достаточно простое выражение для индекса ранжирования  $R_r$ . Перед тем как были получены статистические данные наблюдений, т.е. при  $n_i = N = 0$ , индекс ранжирования  $R_r$  равен  $G_r$ , так как

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow 0, n_i \rightarrow 0} \frac{-\ln N + N - 1}{(N - 1)^2} \sum_{i=1}^m u_{ri} n_i &= 0, \\ \lim_{N \rightarrow 0} \frac{-N + 1 + N \ln N}{(N - 1)^2} &= 1. \end{aligned}$$

Другими словами,  $R_r$  совпадает с критерием Гурвица с параметром пессимизма  $\eta$ , который применяется для решения задачи принятия решений в условиях полной неопределенности.

Рассмотрим случай, когда  $N \rightarrow \infty$ , т.е. имеется большой объем статистических данных и вероятности состояний природы равны  $\pi_i = n_i/N$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Отсюда

$$\begin{aligned} R_r &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{-\ln N + N - 1}{(N - 1)^2} N A_r + \frac{-N + 1 + N \ln N}{(N - 1)^2} G_r \right) = \\ &= A_r = \sum_{i=1}^m u_{ri} \pi_i. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь модель  $\varepsilon$ -засорения и предположим, что  $\mu(\varepsilon) = 1 - \varepsilon$ . Так как  $\varepsilon = s/(N + s)$ , то  $\mu(s) = N/(N + s)$ .



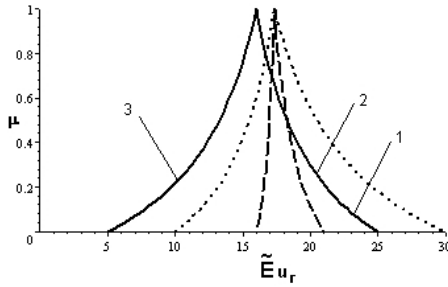


Рис. 8.2. Нечеткие множества  $\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{u}_1$  (график 1),  $\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{u}_2$  (график 2) и  $\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{u}_3$  (график 3) при  $N = 3$

Отсюда  $s = N(\mu^{-1} - 1)$ . Подставляя эту функцию в (8.39) и интегрируя, получим:

$$\begin{aligned}
 R_r &= A_r + ND_r \int_0^\infty N(N+s)^{-3} ds = A_r + D_r/2 = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m u_{ri}n_i - \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^m u_{ri}n_i + \frac{1}{2} (\eta \cdot \underline{\mathbf{u}}_r + (1-\eta)\bar{\mathbf{u}}_r) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m u_{ri}n_i/N + \frac{1}{2} (\eta \cdot \underline{\mathbf{u}}_r + (1-\eta)\bar{\mathbf{u}}_r).
 \end{aligned}$$

Этот частный случай показывает, что “компромисс” между критерием Гурвица и ожидаемой полезностью для робастной модели не зависит от  $N$ . Следовательно, обобщенная модель Дирихле является более предпочтительной, чем модель  $\varepsilon$ -засорения для принятия решений, так как при использовании модели  $\varepsilon$ -засорения сложно определить, как изменять значение  $\varepsilon$  при накоплении статистической информации.

**Пример 8.3.** Вернемся к задаче выбора оптимальной стратегии восстановления отказавшего оборудования (см. пример 8.2). Рассмотрим различные значения  $N$ . При этом числа появления определенных состояний природы  $n_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , генерируются датчиком случайных чисел в соответствии с точным распределением вероятностей  $\pi$ :  $\pi_1 = 0.22$ ,  $\pi_2 = 0.43$ ,  $\pi_3 = 0.29$ ,  $\pi_4 = 0.06$ . Это распределение также будет использоваться для рассмотрения случая

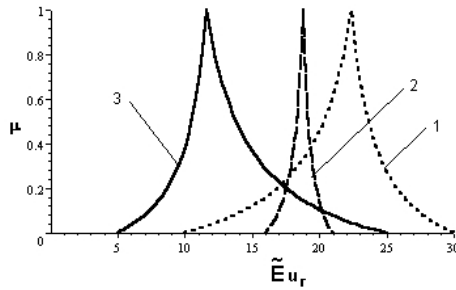


Рис. 8.3. Нечеткие множества  $\tilde{E}u_1$  (график 1),  $\tilde{E}u_2$  (график 2) и  $\tilde{E}u_3$  (график 3) при  $N = 5$

Таблица 8.7. Индексы сравнения в зависимости от  $N$  и  $\eta$

$N$	$(n_1, \dots, n_4)$	$R_1$	$R_2$	$R_3$
0	(0, 0, 0, 0)	$30 - 20\eta$	$21 - 5\eta$	$25 - 20\eta$
3	(0, 2, 1, 0)	$21.4 - 6.5\eta$	$18.5 - 1.6\eta$	$18.9 - 6.5\eta$
5	(2, 2, 1, 0)	$24.3 - 5.1\eta$	$19.3 - 1.3\eta$	$15.0 - 5.1\eta$
10	(2, 5, 2, 1)	$21.2 - 3.5\eta$	$18.9 - 0.9\eta$	$16.3 - 3.5\eta$
30	(6, 14, 9, 1)	$20.3 - 1.7\eta$	$18.3 - 0.4\eta$	$15.3 - 1.7\eta$
$\infty$		19.43	18.26	14.42

$N \rightarrow \infty$ . Функции принадлежности нечетких множеств  $\tilde{E}u_1$  (график 1),  $\tilde{E}u_2$  (график 2) и  $\tilde{E}u_3$  (график 3) показаны на рис. 8.2 ( $N = 3$ ), рис.8.3 ( $N = 5$ ), рис.8.4 ( $N = 10$ ), рис.8.5 ( $N = 30$ ) при условии  $\mu(s) = (1 + s)^{-1}$ . Из рисунков видно, что нечеткость величин  $\tilde{E}u_1, \tilde{E}u_2, \tilde{E}u_3$  уменьшается с увеличением  $N$ .

Таблица 8.7 показывает, как индексы ранжирования  $R_r$  зависят от параметра осторожности  $\eta$ . Очевидно, что  $R_r$  не зависит от  $\eta$  и оптимальным действием является  $a_1$ , если имеется полная информация о распределении вероятностей состояний природы ( $N \rightarrow \infty$ ). Оптимальные действия при различных значениях  $\eta$  и  $N$  показаны в табл. 8.8.

Завершая рассмотрение нечеткой модели принятия решений, необходимо отметить, что главным преимуществом этой модели является возможность ухода от субъективного выбора параметра  $s$  обобщенной модели Дирихле. В то же время платой за это преимущество является субъективный вы-

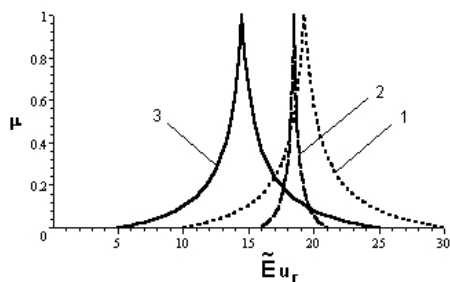


Рис. 8.4. Нечеткие множества  $\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{u}_1$  (график 1),  $\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{u}_2$  (график 2) и  $\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{u}_3$  (график 3) при  $N = 10$

Таблица 8.8. Оптимальные действия при различных  $\eta$  и  $N$

$N$	$\eta$				
	0	0.25	0.5	0.75	1
0	1	1	1	2	3
3	1	1	1	2	2
5	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	2
30	1	1	1	1	1
$\infty$	1	1	1	1	1

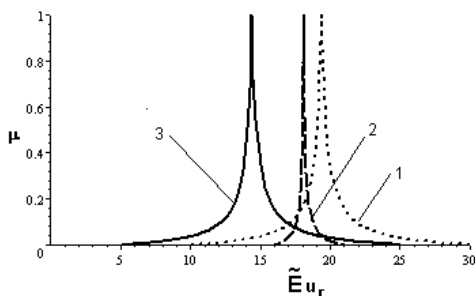


Рис. 8.5. Нечеткие множества  $\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{u}_1$  (график 1),  $\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{u}_2$  (график 2) и  $\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{u}_3$  (график 3) при  $N = 30$

бор функции принадлежности и критерия сравнения нечетких множеств. Однако в отличие от обобщенной модели Дирихле в настоящее время использованию нечетких множеств в принятии решений посвящено большое количество публикаций, что позволяет с достаточной степенью обоснованности и аргументированности выбрать функцию принадлежности и критерий сравнения.

## 8.6. Принятие решений при неточных исходных данных

В этом разделе будет рассмотрен очень важный с практической точки зрения случай неточных или интервальных наблюдений или экспертных оценок. При этом неточность может быть слишком существенной, чтобы заменить эти оценки некоторыми точечными значениями  $\{\omega_j\}$ . Говоря о неточной оценке  $A_i \subseteq \Omega$  состояний, предполагается, что состояние природы, которое реализовалось в действительности неизвестно, но это состояние находится в интервале  $A_i$ . Источниками таких оценок могут быть как экспертные суждения, так и статистические наблюдения. Одним из возможных математических аппаратов для решения задачи принятия решений в рассматриваемой ситуации является теория Демпстера–Шейфера, или теория случайных множеств.

Пусть имеется  $c_i$  интервальных оценок  $A_i \subseteq \Omega$ ,  $i = 1, \dots, M$ . При этом выполняется условие  $\sum_{k=1}^M c_k = N$ . Если состояния природы являются дискретными, то целесообразно также ввести множество  $J_i$  индексов состояний природы, принадлежащих  $A_i$ , т.е.  $A_i = \{\omega_j : j \in J_i\}$ .

### 8.6.1. Принятие решений с использованием функций доверия

Так как точное распределение вероятностей состояний природы неизвестно, то очевидно, что только интервал ожидаемой полезности может быть получен на основе имеющейся информации в форме множества интервалов  $A_i \subseteq \Omega$ . При этом если известны базовые вероятности  $m(A_i) = c_i/N$  соот-

ветствующих интервалов  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , то нижняя и верхняя границы математического ожидания функции полезности (ожидаемой полезности) в случае использования чистой стратегии могут быть найдены на основе интеграла Шоке (Choquet) [12, 80]

$$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} \mathbf{u}_r = \sum_{A_k \subseteq \Omega} \min_{i: \omega_i \in \Omega} u_{ri} \cdot m(A_i), \quad (8.40)$$

$$\overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} \mathbf{u}_r = \sum_{A_k \subseteq \Omega} \max_{i: \omega_i \in \Omega} u_{ri} \cdot m(A_i). \quad (8.41)$$

Аналогичные выражения можно записать для смешанной стратегии. Таким образом, для каждой альтернативы вычисляются нижняя и верхняя границы ожидаемой полезности. Далее решение задачи сводится к сравнению интервалов  $[\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} \mathbf{u}_r, \overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} \mathbf{u}_r]$  для всех  $r$  и использованию методов, рассмотренных в разделе 8.3.

Принятие решений с использованием функций доверия можно также рассматривать как частный случай использования расширенных функций доверия. Поэтому рассмотрим более общую задачу принятия решений.

### 8.6.2. Принятие решений с использованием расширенных функций доверия

Наличие интервалов или подмножеств состояний природы в качестве исходной информации делает эффективным использование теории Демпстера–Шейфера для определения оптимальной альтернативы. Однако использование частотного определения для базовых вероятностей в рамках теории Демпстера–Шейфера имеет ряд недостатков, рассмотренных выше (см. раздел 5.2). Для их устранения были предложены расширенные функции доверия, основанные на использовании обобщенной модели Дирихле. Аналогичные недостатки имеют место и при принятии решений с использованием стандартных функций доверия. Поэтому рассмотрим использование расширенных функций доверия для принятия решений при интервальных исходных данных о состояниях природы [118, 120].

Одно из свойств расширенных функций доверия заключается в том, что они также являются функциями доверия с новыми базовыми вероятностями. Другими словами, если имеется набор событий  $A_i$  с базовыми вероятностями  $m(A_i) = c_i/N$ , то новые базовые вероятности определяются как  $m^*(A_i) = m(A_i) \cdot N/(N+s)$ . Кроме того, добавляется базовая вероятность  $m^*(\Omega) = s/(N+s)$  оценки, охватывающей все состояния природы. Подставляя новые базовые вероятности в (8.40), можно получить нижнюю границу ожидаемой полезности  $\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_r$ . Тогда оптимальное действие при использовании чистой стратегии  $a_r$ , удовлетворяющее неравенство  $\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_r \geq \underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_k$  для всех  $k = 1, \dots, n$ , определяется решением следующей задачи оптимизации:

$$\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_r = \frac{1}{N+s} \left( s \cdot \underline{\mathbf{u}}_r + \sum_{k=1}^M c_k \cdot \min_{\omega_i \in A_k} u_{ri} \right) \rightarrow \max_{r \in \{1, \dots, n\}}. \quad (8.42)$$

Аналогично может быть записана задача оптимизации для определения верхней границы ожидаемой полезности.

Задача оптимизации (8.42) может быть решена перебором значений  $r \in \{1, \dots, n\}$  и выбором наибольшего значения нижней ожидаемой полезности. Здесь параметр  $s$  отражает некоторую степень пессимизма в принятии решений. Так, при  $s = 0$ , получаемое решение можно считать оптимистическим. В то же время увеличение  $s$  приводит к более пессимистичному или осторожному решению.

Преимущества расширенной задачи принятия решения вытекают из свойств расширенных функций доверия, основанных на использовании обобщенной модели Дирихле. Рассмотрим несколько наиболее иллюстративных ситуаций принятия решений.

Один из главных недостатков использования стандартных функций доверия в принятии решений заключается в том, что ненаблюдаемые состояния природы имеют нулевую вероятность. Если бы мы имели бесконечное число наблюдений, то факт нулевой вероятности ненаблюдаемых состояний природы мог бы быть принят. Однако если число наблюдений конечно (и зачастую достаточно мало), то данный факт

может в действительности привести к противоречивым результатам. Рассмотрим следующую задачу принятия решений с двумя альтернативами и двумя состояниями природы:  $\mathcal{A} = \{a_1, a_2\}$ ,  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ , функция полезности  $u_{11} = -1000$ ,  $u_{12} = 1$ ,  $u_{21} = u_{22} = 0$ . Предположим, что имеется только одно ( $M = 1$ ) наблюдение  $A_1 = \{\omega_2\}$ . Используя стандартные функции доверия (или, что то же самое,  $s = 0$ ), получим  $\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_1 = 1$  и  $\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_2 = 0$ . Так как  $\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_1 \geq \underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_2$ , то  $a_1$  является оптимальной альтернативой, т.е. при почти полном отсутствии исходной информации принимается слишком оптимистическое решение. В то же время, если взять  $s > 0$ , например  $s = 1$ ,  $\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_1 = (-1000 + 1)/2 = -499.5$  и  $\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_2 = 0$ . В этом случае оптимальной альтернативой является  $a_2$ , что иллюстрирует способность обобщенной модели Дирихле “сгладить” слишком оптимистическое решение.

Вторым недостатком использования стандартных функций доверия в принятии решений, частично вытекающим из первого, является тот факт, что базовые вероятности не зависят непосредственно от объема выборки. Рассмотрим в качестве иллюстрационного примера две выборки из  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ : одна —  $N = 1$ , вторая —  $N = 100000$ . Для простоты считаем, что все наблюдения являются точными и  $A_1 = \{\omega_2\}$ . Пусть в первом случае  $c_1 = 1$ , а во втором —  $c_1 = 100000$ . Тогда относительные частоты для обоих состояний равны  $1/2$  и одинаковы в обоих случаях. Это говорит о том, что нет различия в двух рассматриваемых ситуациях с точки зрения принятия решений. Хотя очевидно, что доверие к решению в первом случае намного меньше, чем во втором случае. При этом следует отметить, что проблема усугубляется, когда имеются ненаблюдаемые состояния природы. Вернемся к примеру, рассмотренному выше, и предположим, что имеются  $N$  одинаковых оценок второго состояния природы. Тогда

$$\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_1 = \frac{su_{11} + Nu_{12}}{N + s} = -\frac{1000 \cdot s}{N + s} + \frac{N}{N + s}, \quad \underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_2 = 0.$$

Если  $s = 0$ , то  $\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_1 = 1$ ,  $\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_2 = 0$  независимо от  $N$ . Другими словами, наше решение  $a_1$  не зависит от того, имеем ли мы одно наблюдение (почти полное отсутствие информации) или

10000 одинаковых наблюдений (достаточная статистика). Однако если взять  $s = 1$ , то  $a_1$  становится оптимальным только в случае  $N > 1000$ .

Таким образом, использование обобщенной модели Дирихле позволяет обойти ряд противоречивых ситуаций.

Рассмотрим теперь смешанную стратегию в задаче принятия решений при неточных и неполных исходных данных. Подставляя новые базовые вероятности  $m^*(A_i)$  и  $m^*(\Omega)$  в (8.40), можно также получить нижнюю границу ожидаемой полезности  $\underline{\mathbf{E}}\mathbf{u}(\lambda)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}\mathbf{u}(\lambda) &= \\ &= \frac{s}{N+s} \cdot \min_{\omega_i \in \Omega} u(\lambda, \omega_i) + \sum_{k=1}^M \frac{c_k}{N+s} \cdot \min_{\omega_i \in A_k} u(\lambda, \omega_i) = \\ &= \frac{s}{N+s} \cdot \min_{i=1, \dots, m} u(\lambda, \omega_i) + \sum_{k=1}^M \frac{c_k}{N+s} \cdot \min_{j \in J_k} u(\lambda, \omega_j). \end{aligned} \quad (8.43)$$

Введем новые переменные

$$V_k = \min_{j \in J_k} u(\lambda, \omega_j), k = 1, \dots, M, \quad V_0 = \min_{j=1, \dots, m} u(\lambda, \omega_j)$$

и подставим их в целевую функцию (8.43). Тогда можно записать следующий эффективный алгоритм поиска оптимального решения  $\lambda^*$  в случае смешанной стратегии.

Если вероятности  $m$  состояний природы описываются обобщенной моделью Дирихле с параметром  $s$  и информация о состояниях природы представлена в виде  $c_i$  наблюдений подмножеств  $A_i = \{\omega_j : j \in J_i\}$ ,  $i = 1, \dots, M$ , так что  $\sum_{i=1}^M c_i = N$ , то оптимальное действие  $\lambda^*$  при выборе смешанной стратегии, удовлетворяющее неравенству  $\underline{\mathbf{E}}\mathbf{u}(\lambda^*) \geq \underline{\mathbf{E}}\mathbf{u}(\lambda)$  для всех  $\lambda$ , определяется решением следующей задачи линейного программирования:

$$\frac{1}{N+s} \left( s \cdot V_0 + \sum_{k=1}^M c_k \cdot V_k \right) \rightarrow \max_{\lambda}$$

при ограничениях  $V_0, V_i \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \cdot \mathbf{1} = 1$ ,

$$V_i \leq \sum_{r=1}^n \lambda_r u_{rj}, \quad i = 1, \dots, M, \quad j \in J_i,$$



$$V_0 \leq \sum_{r=1}^n \lambda_r u_{rj}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Задача оптимизации, рассмотренная в алгоритме, является линейной, что позволяет ее решить достаточно просто, например, при помощи симплекс-метода. Задача имеет  $\sum_{i=1}^M |J_i| + m + n + 1$  линейных ограничений и  $2m + 1$  переменных оптимизации, где  $|J_i|$  – число элементов множества  $J_i$ . Ограничения в задаче следуют из определения переменных  $V_i$ ,  $i = 0, \dots, M$ . Если каждое подмножество  $A_i$  состоит из одного элемента  $\omega_i$  и  $c_i = n_i$ ,  $M = m$ , то задача сводится к частному случаю, который уже был рассмотрен в параграфе 8.4.1.

**Пример 8.4.** Рассмотрим задачу об инвестициях. Функция полезности показана в табл. 8.9. Три эксперта предоставили следующие оценки развития экономики: два эксперта ( $c_1 = 2$ ) считают, что в экономике будет наблюдаться “средний подъем” или “быстрый подъем” ( $A_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$ ), один эксперт ( $c_2 = 1$ ) полагает, что будет наблюдаться “средний подъем” или “неизменное состояние” ( $A_2 = \{\omega_2, \omega_3\}$ ). Здесь  $M = 2$ ,  $N = 3$ .

Используя (8.42) и предполагая, что  $s = 1$ , можно вычислить нижние границы ожидаемой полезности для каждого действия:

$$\underline{\mathbb{E}u_1} = \frac{1}{4}(1 \cdot \min(6, 9, 9, 8) + 2 \cdot \min(6, 9) + 1 \cdot \min(9, 9)) = 6.75,$$

$$\underline{\mathbb{E}u_2} = \frac{1}{4}(1 \cdot \min(12, 7, 3, -2) + 2 \cdot \min(12, 7) + 1 \cdot \min(7, 3)) = 3.75,$$

$$\underline{\mathbb{E}u_3} = \frac{1}{4}(1 \cdot \min(7, 7, 7, 7) + 2 \cdot \min(7, 7) + 1 \cdot \min(7, 7)) = 7.$$

Из результатов видно, что оптимальное действие –  $a_3$ . Если принять  $s = 0$ , то  $\underline{\mathbb{E}u_1} = 7$ ,  $\underline{\mathbb{E}u_2} = 5.67$ ,  $\underline{\mathbb{E}u_3} = 7$ , и имеет место неоднозначность в выборе оптимального действия между  $a_1$  и  $a_3$ . Первый выбор оптимального действия является более осторожным с точки зрения наличия априорной информации о состояниях природы, так как существует некоторый шанс “спада” экономики с возможными потерями ( $u_{24} = -2$ ), который не учитывается, когда используются стандартные функции доверия ( $s = 0$ ). Если принять  $s = 2$  (еще

Таблица 8.9. Значения функции полезности

	Быстрый подъем	Средний подъем	Неизменное состояние	Спад
Облигации	6	9	9	8
Акции	12	7	3	-2
Депозит	7	7	7	7

более осторожный подход), то  $\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_1 = 6.6$ ,  $\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_2 = 2.6$ ,  $\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_3 = 7$ , т.е. разность между  $\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_1$  и  $\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_3$  возрастает.

Найдем теперь оптимальное рандомизированное действие при  $s = 1$ . Задача линейного программирования имеет следующий вид:

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^3, V_i \in \mathbb{R}} \frac{1}{4} (1 \cdot V_0 + 2 \cdot V_1 + 1 \cdot V_2)$$

при ограничениях  $\sum_{r=1}^3 \lambda_r = 1$  и

$$\begin{aligned} V_1 &\leq 6\lambda_1 + 12\lambda_2 + 7\lambda_3, & V_1 &\leq 9\lambda_1 + 7\lambda_2 + 7\lambda_3, \\ V_2 &\leq 9\lambda_1 + 7\lambda_2 + 7\lambda_3, & V_2 &\leq 9\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3, \\ V_0 &\leq 6\lambda_1 + 12\lambda_2 + 7\lambda_3, & V_0 &\leq 9\lambda_1 + 7\lambda_2 + 7\lambda_3, \\ V_0 &\leq 9\lambda_1 + 3\lambda_2 + 7\lambda_3, & V_0 &\leq 8\lambda_1 - 2\lambda_2 + 7\lambda_3, \end{aligned}$$

Отсюда оптимальное решение задачи —  $V_0 = 27/4$ ,  $V_1 = 27/4$ ,  $V_2 = 33/4$ , (оптимальное рандомизированное действие)  $\lambda_1 = 7/8$ ,  $\lambda_2 = 1/8$ ,  $\lambda_3 = 0$ . При этом значение целевой функции (максимальная нижняя граница ожидаемой полезности) равно 7.125. Если взять  $s = 0$ , то оптимальным решением является  $V_0 = 0$ ,  $V_1 = 33/4$ ,  $V_2 = 27/4$ ,  $\lambda_1 = 5/8$ ,  $\lambda_2 = 3/8$ ,  $\lambda_3 = 0$ , а значение целевой функции 7.75. Казалось бы, решение при  $s = 0$  лучше, чем при  $s = 1$ , так как нижняя граница ожидаемой полезности при  $s = 0$  больше, чем в случае  $s = 1$ . Однако это решение является более рискованным, так как оно не учитывает тот факт, что количество оценок очень мало.

Необходимо отметить, что был рассмотрен только один критерий оптимальности, учитывающий нижнюю границу ожидаемой полезности. Очевидно, что принятие решений с использованием параметра осторожности  $\eta \in [0, 1]$ , который уже рассматривался ранее, приводит к более сложной задаче. Однако решение этой задачи аналогично тому, которое было предложено в разделе 8.3.2.

## 8.7. Принятие решений в рамках иерархических моделей второго порядка

Иерархические модели неопределенности второго порядка уже были рассмотрены в главе 6. Рассмотрим случай, когда исходная информация о состояниях природы представлена в виде оценок (6.1). Так как на множестве распределений вероятностей первого уровня  $\pi \in \mathcal{R}$  определены распределения вероятностей второго уровня из множества  $\mathcal{P}$ , то ожидаемая полезность  $\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda)$  рандомизированного действия сама является случайным числом, так что существует нижняя  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{P}} \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda)$  и верхняя  $\overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{P}} \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda)$  границы математического ожидания ожидаемой полезности, т.е. границы “усредненной” ожидаемой полезности. В случае использования чистой стратегии для каждой альтернативы можно определить границы “усредненной” ожидаемой полезности  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{P}} \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_r$  и  $\overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{P}} \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_r$ ,  $r = 1, \dots, n$ . Таким образом, критерий пессимистического принятия<sup>4</sup> решений для смешанной стратегии можно записать следующим образом. Действие  $\lambda^*$  является оптимальным, если для всех  $\lambda$  выполняется неравенство

$$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{P}} \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda^*) \geq \underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{P}} \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda).$$

Для чистой стратегии действие  $r$  является оптимальным, если для всех  $k \in \{1, \dots, n\}$  выполняется неравенство

$$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{P}} \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_r \geq \underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{P}} \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_k.$$

Следовательно, для определения оптимального действия для чистой стратегии необходимо использовать алгоритм вычисления “среднего” интервала, детально рассмотренный в разделе 6.4.

Задача несколько усложняется при поиске рандомизированного действия. В этом случае необходимо решить задачу оптимизации

---

<sup>4</sup>Критерий с использованием коэффициента осторожности приводит к слишком громоздким выражениям. Так как для этого критерия алгоритм решения задачи не отличается от алгоритма, представленного в разделе 8.3.2, то здесь ограничимся рассмотрением только пессимистического критерия.

$$\mathbb{E}_{\mathcal{P}} \mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}(\lambda) \rightarrow \max_{\lambda_s}$$

при ограничениях (6.1),  $\lambda \cdot \mathbf{1} = 1$  и  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

В двойственной форме задача переписывается как

$$\mathbb{E}_{\mathcal{P}} \mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}(\lambda) = \max \left\{ c + \sum_{k=1}^r (c_k \underline{\gamma}_k - d_k \bar{\gamma}_k) \right\} \quad (8.44)$$

при ограничениях  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c_k \in \mathbb{R}_+$ ,  $d_k \in \mathbb{R}_+$ ,  $\lambda \cdot \mathbf{1} = 1$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$$c + \sum_{k=1}^r (c_k - d_k) I_{B_k} (\mathbb{E}_{\pi} f_k) \leq \min_{\mathcal{R}_J} \mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}(\lambda). \quad (8.45)$$

Здесь  $\mathcal{R}_J$  – подмножество распределений вероятностей  $\pi$ , определяемое множеством согласованных ограничений  $\mathcal{A}_{N \setminus J}^c \cup \mathcal{A}_J$ ,  $J$  – множество индексов,  $J \subseteq N = \{1, 2, \dots, m\}$  (см. раздел 6.4). Как видно из двойственной задачи оптимизации, поиск оптимального действия ничем не отличается от вычисления “среднего” интервала ожидаемой полезности.

Другой путь поиска оптимального действия – использование крайних точек (см. раздел 8.3.1). Введем новую переменную  $G_J = \min_{\pi \in \mathcal{R}_J} \mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}(\lambda)$ . Тогда

$$\mathbb{E}_{\mathcal{P}} \mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}(\lambda) = \max \left\{ c + \sum_{k=1}^r (c_k \underline{\gamma}_k - d_k \bar{\gamma}_k) \right\} \quad (8.46)$$

при ограничениях  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c_k \in \mathbb{R}_+$ ,  $d_k \in \mathbb{R}_+$ ,  $\lambda \cdot \mathbf{1} = 1$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$$c + \sum_{k \in J} (c_k - d_k) \leq G_J, \quad (8.47)$$

$$\mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}(\lambda) \geq G_J, \quad \pi \in \mathcal{R}_J, \quad \forall J \subseteq N. \quad (8.48)$$

Для решения задачи линейного программирования необходимо учитывать только ограничения, соответствующие крайним точкам непустых подмножеств  $\mathcal{R}_J$ .

Таблица 8.10. Согласованность множеств

$J$	Множества	Согласованность
$\{1, 2\}$	$\mathbb{E}_\pi I_{\{1,2\}}(\omega) \in [0, 0.4], \mathbb{E}_\pi \omega \in [1, 2]$	нет
$\{1\}$	$\mathbb{E}_\pi I_{\{1,2\}}(\omega) \in [0, 0.4], \mathbb{E}_\pi \omega \in [2, 3]$	есть
$(2)$	$\mathbb{E}_\pi I_{\{1,2\}}(\omega) \in [0.4, 1], \mathbb{E}_\pi \omega \in [1, 2]$	есть
$\{\emptyset\}$	$\mathbb{E}_\pi I_{\{1,2\}}(\omega) \in [0.4, 1], \mathbb{E}_\pi \omega \in [2, 3]$	есть

**Пример 8.5.** Два эксперта оценивают 3 состояния  $\{1, 2, 3\}$  природы (см. задачу в разделе 8.3.2): вероятность того, что будет наблюдаться либо первое, либо второе состояние, меньше 0.4; в среднем будут наблюдаться состояния 1 и 2. Степень доверия к первому эксперту равна 0.5. Это означает, что он предоставляет 50% правильных оценок. Степень доверия ко второму эксперту находится в пределах от 0.3 до 1. Это означает, что верны более 30% суждений этого эксперта. Эти оценки формально представляются в следующем виде:

$$\Pr \{0 \leq \mathbb{E}_\pi I_{\{1,2\}}(\omega) \leq 0.4\} = 0.5,$$

$$\Pr \{1 \leq \mathbb{E}_\pi \omega \leq 2\} \in [0.3, 1].$$

Значения функции полезности  $u(a_s, \omega_j)$  показаны в таблице 8.3. Найдем оптимальную смешанную стратегию  $\lambda_1^*, \lambda_2^*$ .

Из табл. 8.10 следует, что  $\mathcal{R}_{\{1,2\}} = \emptyset$ . Следовательно, находим крайние точки только для подмножеств  $\mathcal{R}_{\{1\}}, \mathcal{R}_{\{2\}}, \mathcal{R}_{\{\emptyset\}}$ .

Подмножество  $\mathcal{R}_{\{1\}}$ :

$$\{\pi_1 = 0, \pi_2 = 0, \pi_3 = 1\}$$

$$\{\pi_1 = 0, \pi_2 = 0.4, \pi_3 = 0.6\}$$

$$\{\pi_1 = 0.4, \pi_2 = 0, \pi_3 = 0.6\}$$

Подмножество  $\mathcal{R}_{\{2\}}$ :

$$\{\pi_1 = 1, \pi_2 = 0, \pi_3 = 0\}$$

$$\{\pi_1 = 0, \pi_2 = 1, \pi_3 = 0\}$$

$$\{\pi_1 = 0.5, \pi_2 = 0, \pi_3 = 0.5\}$$

Подмножество  $\mathcal{R}_{\{\emptyset\}}$ :

$$\{\pi_1 = 0, \pi_2 = 1, \pi_3 = 0\}$$

$$\{\pi_1 = 0.5, \pi_2 = 0, \pi_3 = 0.5\}$$

$$\{\pi_1 = 0, \pi_2 = 0.4, \pi_3 = 0.6\}$$

$$\{\pi_1 = 0.4, \pi_2 = 0, \pi_3 = 0.6\}$$

Таким образом, получаем следующую задачу линейного программирования:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{P}} \mathbb{E}_{\pi} \mathbf{u}(\lambda) = \max \{c + 0.5c_1 - 0.5d_1 + 0.3c_2 - 1d_2\}$$

при ограничениях  $c_i \geq 0, d_i \geq 0, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$

$$c + 1 \cdot (c_1 - d_1) + 0 \cdot (c_2 - d_2) \leq G_{\{1\}},$$

$$c + 0 \cdot (c_1 - d_1) + 1 \cdot (c_2 - d_2) \leq G_{\{2\}},$$

$$c + 0 \cdot (c_1 - d_1) + 0 \cdot (c_2 - d_2) \leq G_{\{\emptyset\}},$$

$$(\lambda_1 + 4\lambda_2) \cdot 1 \geq G_{\{1\}},$$

$$(3\lambda_1 + 7\lambda_2) \cdot 0.4 + (\lambda_1 + 4\lambda_2) \cdot 0.6 \geq G_{\{1\}},$$

$$(6\lambda_1 + 2\lambda_2) \cdot 0.4 + (\lambda_1 + 4\lambda_2) \cdot 0.6 \geq G_{\{1\}},$$

$$(6\lambda_1 + 2\lambda_2) \cdot 1 \geq G_{\{2\}},$$

$$(3\lambda_1 + 7\lambda_2) \cdot 1 \geq G_{\{2\}},$$

$$(6\lambda_1 + 2\lambda_2) \cdot 0.5 + (\lambda_1 + 4\lambda_2) \cdot 0.5 \geq G_{\{2\}},$$

$$(3\lambda_1 + 7\lambda_2) \cdot 1 \geq G_{\{\emptyset\}},$$

$$(6\lambda_1 + 2\lambda_2) \cdot 0.5 + (\lambda_1 + 4\lambda_2) \cdot 0.5 \geq G_{\{\emptyset\}},$$

$$(3\lambda_1 + 7\lambda_2) \cdot 0.4 + (\lambda_1 + 4\lambda_2) \cdot 0.6 \geq G_{\{\emptyset\}},$$

$$(6\lambda_1 + 2\lambda_2) \cdot 0.4 + (\lambda_1 + 4\lambda_2) \cdot 0.6 \geq G_{\{\emptyset\}}.$$

Решение задачи:

$$c = 3.143, G_{\{1\}} = G_{\{2\}} = G_{\{\emptyset\}} = 3.143,$$

$$c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0,$$

$$\lambda_1^* = 0.2857, \lambda_2^* = 0.7143.$$

“Осторожные” степени доверия к экспертным оценкам могут быть определены с использованием обобщенной модели Дирихле (см. раздел 6.7).

**Пример 8.6.** Рассмотрим задачу об инвестициях. Функция полезности показана в таблице 8.9. Шесть экспертов дали следующие оценки о состоянии экономики: два эксперта считают, что “средний подъем” будет наблюдаться с большей вероятностью, чем “неизменное состояние”; три эксперта считают, что “спад” является более вероятным, чем “быстрый подъем”; один эксперт полагает, что “неизменное состояние” является более вероятным, чем “средний подъем”. Здесь  $N = 6$  и распределение вероятностей состояний природы

–  $(p_1, \dots, p_4)$ . Имеющиеся оценки могут быть формально записаны как  $p_2 > p_3$ ,  $p_4 > p_1$ ,  $p_3 > p_2$  или как  $p_2 - p_3 > 0$ ,  $p_4 - p_1 > 0$ ,  $p_3 - p_2 > 0$ . Очевидно, что они являются противоречивыми, и невозможно найти распределение вероятностей состояний природы, удовлетворяющее всем условиям (оценкам) одновременно. Поэтому необходимо использовать иерархическую модель и вероятности второго уровня.

Определим три подмножества  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$ ,  $\mathcal{M}_3$  распределений  $(p_1, \dots, p_4)$ , образованные каждой оценкой соответственно.

Для вычисления границ вероятностей второго уровня определим, для каких значений  $i$  и  $j$  выполняются условия  $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}_j$  и  $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j = \emptyset$ . Очевидно, что  $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_3 = \emptyset$ , так как первая оценка противоречит третьей ( $p_2 > p_3$  и  $p_3 > p_2$ ). Поэтому  $\mathcal{M}_1 \not\subseteq \mathcal{M}_3$  и  $\mathcal{M}_3 \not\subseteq \mathcal{M}_1$ . Рассмотрим условие  $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$ . Для его проверки необходимо решить задачу линейного программирования

$$\min(\max) (p_4 - p_1)$$

при ограничениях  $p_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ,

$$p_2 > p_3, \quad p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$$

Отсюда  $p_4 - p_1 \in (-1; 1)$ . Однако  $p_2 - p_3 \in (0; 1)$  и  $(-1; 1) \not\subseteq (0; 1)$ . Следовательно, справедливо условие  $\mathcal{M}_1 \not\subseteq \mathcal{M}_2$ . Аналогично получим

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 \not\subseteq \mathcal{M}_1, \quad \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_1 \neq \emptyset, \quad \mathcal{M}_3 \not\subseteq \mathcal{M}_2, \\ \mathcal{M}_2 \not\subseteq \mathcal{M}_3, \quad \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3 \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Если  $s = 1$ , то границы вероятностей второго уровня равны:

$$\begin{aligned} \underline{P}(\mathcal{M}_1|1) = 2/7, \quad \overline{P}(\mathcal{M}_1|1) = 6/7, \\ \underline{P}(\mathcal{M}_2|1) = 3/7, \quad \overline{P}(\mathcal{M}_2|1) = 1, \\ \underline{P}(\mathcal{M}_3|1) = 1/7, \quad \overline{P}(\mathcal{M}_3|1) = 5/7. \end{aligned}$$

В качестве функции  $g$ , среднее значение которой необходимо найти для принятия решений, выбирается ожидаемая полезность  $\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_r$ , т.е.  $g = \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_r$ . Теперь критерий принятия решений может быть записан следующим образом. Действие  $k$  является оптимальным, если для всех  $r \in \{1, \dots, 4\}$  выполняется неравенство  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{P}} \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_k \geq \underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{P}} \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_r$ . Здесь

$$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{P}} \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_r = \min_{\mathcal{P}} \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_r,$$

$\mathcal{P}$  – множество распределений вероятностей второго уровня.

Пусть  $J = \{1, 2, 3\}$ . Тогда

$$\min_{\mathcal{R}_J} \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_r = \min_p \sum_{i=1}^4 u_{ri} p_i,$$

$$\max_{\mathcal{R}_J} \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_r = \max_p \sum_{i=1}^4 u_{ri} p_i$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= 1, \\ p_2 - p_3 &> 0, \\ p_4 - p_1 &> 0, \\ p_3 - p_2 &> 0, \\ 1 &\leq 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 \leq 2. \end{aligned}$$

Задачи не имеют решения и  $\mathcal{R}_{\{1,2,3\}} = \emptyset$ . Аналогично можно проанализировать все подмножества ограничений в соответствии с возможными множествами индексов  $J$  и найти нижние и верхние границы для  $\mathbb{E} \mathbf{u}_r$ , принимая во внимание тот факт, что дополнение к множеству  $\mathcal{M}_i$ , образованному неравенством  $p_j - p_k > 0$ , формируется на основе неравенства  $p_j - p_k \leq 0$ . Соответствующие согласованные множества и нижние границы ожидаемой полезности трех альтернатив показаны в табл. 8.11.

Используя полученные результаты, можно записать задачу линейного программирования для вычисления нижней “усредненной” границы ожидаемой полезности первого действия

$$\underline{\mathbb{E}} \mathbf{u}_1 = \max_{c_0, c_i, d_i} \left( c_0 + \frac{2}{7} \cdot c_1 - \frac{6}{7} \cdot d_1 + \frac{3}{7} \cdot c_2 - d_2 + \frac{1}{7} \cdot c_3 - \frac{5}{7} \cdot d_3 \right),$$

при ограничениях  $c_i, d_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned} c_0 + (c_2 - d_2) + (c_3 - d_3) &\leq 7, \\ c_0 + (c_1 - d_1) + (c_2 - d_2) &\leq 7, \\ c_0 + (c_1 - d_1) &\leq 6, \\ c_0 + (c_2 - d_2) &\leq 7, \\ c_0 + (c_3 - d_3) &\leq 6, \\ c_0 &\leq 6. \end{aligned}$$

Отсюда  $\underline{\mathbb{E}}_P \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}_1 = 6.428$ . Аналогичным образом получим усредненные границы ожидаемой полезности второго и третьего действий



Таблица 8.11. Результаты расчетов границ ожидаемой полезности

$J$	$\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_1$	$\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_2$	$\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_3$
$\{2, 3\}$	7	-2	7
$\{1, 2\}$	7	-2	7
$\{1\}$	6	5	7
$\{2\}$	7	-2	7
$\{3\}$	6	3	7
$\{\emptyset\}$	6	5	7

$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{P}}\underline{\mathbb{E}}_{\pi}\mathbf{u}_2 = -2$ ,  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{P}}\underline{\mathbb{E}}_{\pi}\mathbf{u}_3 = 7$ . Таким образом, оптимальным действием является третье.

### 8.8. Принятие решений при известном типе распределения вероятностей состояний природы

Рассмотрим случай, когда вероятности состояний природы характеризуются некоторым дискретным распределением вероятностей известного типа, например биномиальным распределением или распределением Пуассона. Тип распределения зачастую может быть определен из физических свойств рассматриваемого объекта. Однако параметры соответствующего распределения могут быть неопределенными. Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_t)$  – вектор параметров некоторого дискретного распределения  $\pi(\omega, \alpha)$ . Предполагается, что  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ . Если предположить, что эксперты предоставляют некоторые неточные и ненадежные сведения о параметрах, то получаем иерархическую модель второго порядка, рассмотренную в разделе 6.8, где параметры распределений сами выступают как случайные величины с некоторым неизвестным распределением второго порядка. В общем случае если вектор параметров имеет совместную плотность вероятности  $\rho$ , то экспертные оценки формально записываются в виде

$$\underline{\gamma}_{ij} \leq \mathbb{E}_{\rho} f_{ij}(\alpha_i) \leq \bar{\gamma}_{ij}, \quad i = 1, \dots, t, \quad j = 1, \dots, r_i. \quad (8.49)$$

Здесь  $r_i$  – число оценок, касающихся  $i$ -го параметра;  $f_{ij}$  – функция, соответствующая информации об этом параметре,

предоставленной  $j$ -м экспертом. Следует отметить, что аналогом (8.49) являются оценки (6.40).

Предположим, что известны границы параметров  $[\underline{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i]$ ,  $i = 1, \dots, t$ , с вероятностью 1. Внутри этих интервалов параметр имеет неизвестную плотность вероятности  $\rho_i$ . Таким образом, имеем некоторое множество дискретных распределений  $\pi(\omega_j, \alpha)$ , определяемое различными параметрами. Тогда ожидаемая полезность рандомизированного действия, соответствующая одной реализации вектора  $\alpha$ , имеет вид

$$\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda, \alpha) = \sum_{j=1}^m (u(\lambda, \omega_j) \cdot \pi(\omega_j, \alpha)).$$

Усредняя ожидаемые полезности  $\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda, \alpha)$  по всем возможным векторам  $\alpha$ , получим:

$$\mathbb{E}_\rho \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda, \alpha) = \int_{\Omega^t} \left( \sum_{j=1}^m (u(\lambda, \omega_j) \cdot \pi(\omega_j, \alpha)) \right) \rho(\alpha) d\alpha.$$

Здесь  $\Omega^t = [\underline{\alpha}_1, \bar{\alpha}_1] \times \dots \times [\underline{\alpha}_t, \bar{\alpha}_t]$ .

Тогда можно определить пессимистический критерий принятия решений следующим образом. Рандомизированное действие  $\lambda^*$  является оптимальным, если выполняется условие

$${}^L \mathbb{E}_{\mathcal{P}} (\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda^*, \alpha)) \geq {}^L \mathbb{E}_{\mathcal{P}} (\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda, \alpha)). \quad (8.50)$$

Здесь  $\mathcal{P}$  – множество всех возможных плотностей  $\rho(\alpha)$ , удовлетворяющих ограничениям

$$\underline{\gamma}_{ij} \leq \mathbb{E}_\rho f_{ij}(\alpha_i) \leq \bar{\gamma}_{ij}, \quad i = 1, \dots, t, \quad j = 1, \dots, r_i,$$

или

$$\underline{\gamma}_{ij} \leq \int_{\underline{\alpha}_i}^{\bar{\alpha}_i} f_{ij}(\alpha_i) \rho_i(\alpha_i) d\alpha_i \leq \bar{\gamma}_{ij}, \quad i = 1, \dots, t, \quad j = 1, \dots, r_i.$$

Тогда оптимальное действие  $\lambda^*$  может быть получено решением следующей задачи оптимизации:

$${}^L \mathbb{E}_{\mathcal{P}} (\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda, \alpha)) \rightarrow \max_{\lambda} \quad (8.51)$$

при ограничениях  $\lambda \cdot \mathbf{1} = 1$ ,  $\lambda_v \geq 0$ ,  $v = 1, \dots, n$ .

Если предположить, что информация о независимости параметров отсутствует, т.е. совместная плотность  $\rho(\alpha)$  не может быть представлена как произведение маргинальных плотностей, то для задачи (8.51) можно записать двойственную задачу (см. аналогичные преобразования в разделе 8.3.1)

$$\begin{aligned} & {}^L\mathbb{E}_{\mathcal{P}}(\mathbb{E}_{\pi}\mathbf{u}(\lambda, \alpha)) = \\ & = \max \left\{ c + \sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^{r_k} (c_{kj}\underline{\gamma}_{kj} - d_{kj}\bar{\gamma}_{kj}) \right\} \end{aligned} \quad (8.52)$$

при ограничениях  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c_{kj} \in \mathbb{R}_+$ ,  $d_{kj} \in \mathbb{R}_+$ ,  $\forall \alpha \in \Omega^t$ ,

$$c + \sum_{k=1}^t \sum_{j=1}^{r_k} (c_{kj} - d_{kj}) f_{kj}(\alpha_i) \leq \mathbb{E}_{\pi}\mathbf{u}(\lambda, \alpha), \quad (8.53)$$

$$\lambda \cdot \mathbf{1} = 1, \lambda_v \geq 0, v = 1, \dots, n. \quad (8.54)$$

Приведенная задача является задачей линейного программирования, имеющей бесконечное число ограничений. Однако для многих частных случаев задача (8.52)–(8.54) может быть существенно упрощена. Рассмотрим наиболее важный и реалистичный случай, когда эксперты предоставляют  $t$  интервалов  $B_1, \dots, B_r$  неизвестных параметров и оценка каждого эксперта характеризуется некоторой вероятностью  $\gamma_{kj}$  или интервалом вероятностей  $[\underline{\gamma}_{ij}, \bar{\gamma}_{ij}]$ . Более того, предположим, что  $t = 1$  и  $\alpha = (\alpha)$ , т.е. имеется только один неизвестный параметр распределения  $\pi(\omega_j, \alpha)$ . Также заменим обозначение  $r_1$  на  $r$ . Другими словами, ограничения (8.49) представляются как

$$\underline{\gamma}_j \leq \int_{\underline{\alpha}}^{\bar{\alpha}} I_{B_j}(\alpha) \rho(\alpha) d\alpha \leq \bar{\gamma}_j, \quad j = 1, \dots, r.$$

Тогда задача (8.52)–(8.54) может быть переписана как

$${}^L\mathbb{E}_{\mathcal{P}}(\mathbb{E}_{\pi}\mathbf{u}(\lambda, \alpha)) = \max \left\{ c + \sum_{k=1}^r (c_k \underline{\gamma}_k - d_k \bar{\gamma}_k) \right\} \quad (8.55)$$

при ограничениях (8.54),  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c_k, d_k \geq 0$ ,

$$c + \sum_{k=1}^r (c_k - d_k) I_{B_k}(\alpha) \leq \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda, \alpha), \quad \forall \alpha \in [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]. \quad (8.56)$$

Обозначим двоичный вектор  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_r)$ ,  $i_j \in \{0, 1\}$ . В соответствии с возможными значениями вектора  $\mathbf{i}$ , интервал  $B = [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$  всех значений параметра  $\alpha$  может быть разделен на  $2^r$  подынтервалов  $B^{(1)}, \dots, B^{(2^r)}$  так, что  $i$ -й подынтервал образуется как

$$B^{(i)} = \bigcap_{k=1}^r \begin{cases} B_k, & i_k = 1 \\ B_k^c, & i_k = 0 \end{cases}.$$

Пусть  $L \subseteq \{1, \dots, 2^r\}$  – множество индексов всех непустых подынтервалов  $B^{(j)} \neq \emptyset$ . Тогда из всех ограничений (8.56), соответствующих подынтервалу  $B^{(j)}$ , оставляем только одно ограничение

$$c + \sum_{k=1}^r (c_k - d_k) i_k \leq \min_{\alpha \in B^{(j)}} \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda, \alpha). \quad (8.57)$$

Отсюда при той же целевой функции задача (8.55)–(8.56) имеет новые ограничения (8.57) для всех значений  $\mathbf{i}$ .

Введем переменную  $G_j = \min_{\alpha \in B^{(j)}} \mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda, \alpha)$ . Тогда задача с целевой функцией (8.55) и ограничениями (8.57) может быть переписана как

$${}^L \mathbb{E}_{\mathcal{P}} (\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda^*, \alpha)) = \max \left\{ c + \sum_{k=1}^r (c_k \underline{\gamma}_k - d_k \bar{\gamma}_k) \right\} \quad (8.58)$$

при ограничениях (8.54),  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c_k, d_k \geq 0$ ,

$$c + \sum_{k=1}^r (c_k - d_k) i_k \leq G_j, \quad \forall \mathbf{i}, \quad (8.59)$$

$$\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda, \alpha) \geq G_j, \quad \forall \alpha \in B^{(j)}, \quad \forall \mathbf{i}. \quad (8.60)$$

Таким образом, получена более простая задача линейного программирования, но снова с бесконечным числом ограничений. Однако если известно, что функция  $\mathbb{E}_\pi \mathbf{u}(\lambda, \alpha)$  является

монотонной по  $\alpha$ , то достаточно рассмотреть только граничные точки интервалов  $B^{(j)}$ . Ограничения (8.60) могут быть теперь записаны как

$$\sum_{j=1}^m \left( \sum_{v=1}^n (u(a_v, \omega_j) \lambda_v) \cdot \pi(\omega_j) \right) \leq G_j$$

или

$$\sum_{v=1}^n \left( \sum_{j=1}^m (u(a_v, \omega_j) \pi(\omega_j)) \right) \lambda_v \leq G_j.$$

Отсюда видно, что ограничения линейны по отношению к переменным  $\lambda_v$ .

**Пример 8.7.** Предположим, что три состояния природы  $\{1, 2, 3\}$  в задаче, рассмотренной в разделе 8.3.2, характеризуются биномиальным распределением

$$\pi(\omega_j, \alpha) = \binom{3-j}{j-1} \alpha^{j-1} (1-\alpha)^{3-j-1}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Два эксперта предоставили следующие две оценки параметра  $\alpha \in [0, 1]$ :

- 1) параметр  $\alpha$  находится в интервале  $[0.8, 1]$ ;
- 2) параметр  $\alpha$  находится в интервале  $[0.7, 1]$ .

Доверие к оценкам первого эксперта равно 0.5; доверие к оценкам второго эксперта находится в интервале от 0.3 до 1. Формально приведенная информация может быть записана как<sup>5</sup>

$$\int_0^1 I_{[0.8, 1]}(\alpha) \rho(\alpha) d\alpha = 0.5,$$

$$\int_0^1 I_{[0.7, 1]}(\alpha) \rho(\alpha) d\alpha \in [0.3, 1].$$

Функция полезности показана в табл. 8.3. Найдем множество индексов  $L \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ . Из таблицы 8.12 следует, что  $L = \{1, 3, 4\}$ .

---

<sup>5</sup>Необходимо отметить, что при точных степенях доверия к оценкам экспертов можно использовать аппарат теории свидетельств для обработки этих оценок.

Таблица 8.12. Пересечения интервалов

$\mathbf{i}$	Интервалы	Непустой
(1, 1)	$[0.8, 1] \cap [0.7, 1]$	да
(1, 0)	$[0.8, 1] \cap [0, 0.7]$	нет
(0, 1)	$[0, 0.8] \cap [0.7, 1]$	да
(0, 0)	$[0, 0.8] \cap [0, 0.7]$	да

Определим  $\lambda_1, \lambda_2$ . Задача оптимизации для вычисления  $\lambda_1, \lambda_2$  имеет вид

$${}^L\mathbb{E}_{\mathcal{P}}(\mathbb{E}_{\pi}\mathbf{u}(\lambda, \alpha)) = \max \{c + 0.5c_1 - 0.5d_1 + 0.3c_2 - 1d_2\}$$

при ограничениях  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, c \in \mathbb{R}, c_k, d_k \in \mathbb{R}_+,$

$$c + 1 \cdot (c_1 - d_1) + 1 \cdot (c_2 - d_2) \leq G_1,$$

$$c + 0 \cdot (c_1 - d_1) + 1 \cdot (c_2 - d_2) \leq G_3,$$

$$c + 0 \cdot (c_1 - d_1) + 0 \cdot (c_2 - d_2) \leq G_4,$$

$$(\alpha^2 - 6\alpha + 6) \lambda_1 + (10\alpha - 8\alpha^2 + 2) \lambda_2 \geq G_1, \alpha \in [0.8, 1],$$

$$(\alpha^2 - 6\alpha + 6) \lambda_1 + (10\alpha - 8\alpha^2 + 2) \lambda_2 \geq G_3, \alpha \in [0.7, 0.8],$$

$$(\alpha^2 - 6\alpha + 6) \lambda_1 + (10\alpha - 8\alpha^2 + 2) \lambda_2 \geq G_3, \alpha \in [0, 0.7].$$

Решая задачу приближенно для конечного числа значений  $\alpha$ , получаем

$$c = 3.636, G_1 = 2.773, G_3 = G_4 = 3.636,$$

$$c_1 = c_2 = d_2 = 0, d_1 = 0.864,$$

$$\lambda_1 = 0.409, \lambda_2 = 0.591.$$

Таким образом, оптимальное рандомизированное действие – (0.408, 0.591).

Принятие решений с использованием чистой стратегии осуществляется аналогично. При этом необходимо также решить  $n$  задач оптимизации (8.55)–(8.56) для каждого вектора  $\mathbf{u}_i, i = 1, \dots, n,$  но без использования ограничений, связанных с распределением  $\lambda$ .

## 8.9. Заключение

Как следует из рассмотрения различных подходов к принятию решений в этой главе, неполнота информации, с од-

ной стороны, существенно усложняет алгоритмы поиска оптимального решения, что, очевидно, связано с более сложным описанием имеющейся неточности и ненадежности исходных данных о состояниях природы. С другой стороны, получаемые решения являются более осторожными и адекватными. Они более тонко учитывают отсутствие точной информации, о чем свидетельствует парадокс Эллсберга и его рассмотрение методами, учитывающими неполноту информации.

Следует отметить, что многие критерии принятия решений, описанные в разделе 8.2, например критерий Уолли или критерий Леви, не рассматривались в данной главе. Причиной этого прежде всего является то, что в настоящее время отсутствуют результаты, связанные с этими критериями и теми моделями неопределенности и неточности, которые применялись здесь для описания состояний природы. Многие вопросы применения этих критериев и эффективных алгоритмов принятия решений на их основе в настоящее время являются открытыми, несмотря на значительный к ним интерес. Более того, необходимо признать, что даже рассмотренные в этой главе критерии были применены к достаточно простым (классическим) задачам принятия решений, что, конечно, обусловлено сложностью математического описания неточности и неполноты исходных данных. Их развитие и обобщение на более существенные с практической точки зрения проблемы – это задачи, которые необходимо решать в будущем.

## Глава 9

# Принятие решений при непрерывном множестве состояний природы и интервальной функции распределения

Расчеты для бесконечных множеств – менее точный инструмент, чем для конечных. Пастушка, которая сможет пересчитать стадо из сотни овец, узнает, что волк унес одну. Но в случае бесконечного стада она не заметит этого, пока не пропадут все ее овцы.

*Питер Камерон*

### 9.1. Непрерывные множества состояний природы и р-блоки

До сих пор большинство методов принятия решений рассматривались при условии, что множество состояний природы конечно. При этом условии для большинства задач поиск оптимального действия сводился к задаче линейного программирования с конечным числом переменных и конечным числом ограничений. Задача существенно усложняется, если число состояний природы бесконечно, а соответствующие распределения вероятностей состояний являются непрерывными и точно неизвестны.

Множество подходов к поиску оптимального действия в условиях неполноты информации были рассмотрены выше. Каждый из этих подходов прямо или косвенно основан на выборе некоторого “оптимального” распределения вероятностей



состояний природы из множества  $M$  всех возможных распределений, согласованного с имеющейся неполной информацией, и затем вычислении нижней и верхней границ ожидаемой полезности в соответствии с этим “оптимальным” распределением. При этом “оптимальное” распределение определялось прямо или косвенно через крайние точки области допустимых решений  $M$ . Однако при бесконечном множестве состояний природы число крайних точек может быть бесконечно, что делает решение задачи достаточно сложным. Анализа множества распределений  $M$  можно избежать, если использовать двойственную задачу линейного программирования. В этом случае непрерывность функций распределения множества  $M$  переходит в бесконечное число ограничений, что также не всегда позволяет ее решить с достаточной степенью точности.

Поэтому ниже рассмотрен частный случай исходных данных о состояниях природы, когда множество  $M$  задается верхней и нижней функциями распределения вероятностей или в виде  $r$ -блоков. Оказывается, что при использовании такой модели многие задачи принятия решений могут быть решены даже в явном виде. Более того, необходимо отметить, что поиск оптимального решения в этом случае является достаточно простой задачей с вычислительной точки зрения, если функция полезности является монотонной на всем множестве значений. Однако условие монотонности может нарушаться. Кини и Райфа [157] приводят пример немонотонной функции полезности, характеризующей процент содержания сахара в крови. Существует некоторый “нормальный” процент сахара в крови, и отклонение от этого значения свидетельствует о возможном заболевании. В этом случае функция полезности не является монотонной и имеет максимум в точке “нормального” процента сахара.

Поиск оптимального решения в случае немонотонной функции полезности наталкивается на ряд сложностей. Тем не менее использование свойств функции полезности дает возможность получения достаточно эффективных алгоритмов поиска оптимального решения.

## 9.2. Постановка задачи в терминах линейного программирования

Рассмотрим случай, когда исходная информация о случайной величине  $X$ , характеризующей состояния природы, представлена в виде нижнего  $\underline{F}$  и верхнего  $\overline{F}$  распределений вероятностей. Это означает, что некоторое “истинное” точное распределение  $F$  случайной величины  $X$  не известно, но это распределение может быть произвольным с учетом условия

$$\underline{F}(x) \leq F(x) \leq \overline{F}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (9.1)$$

Другими словами, функции распределения  $\underline{F}$  и  $\overline{F}$  могут рассматриваться как границы для множества точных распределений  $F$ . Как уже отмечалось в первой части книги, пара распределений  $\underline{F}$  и  $\overline{F}$  называется иногда в литературе “p-блоком” [13], если условие (9.1) выполняется. Обозначим множество  $\mathcal{M}$  всех распределений, удовлетворяющих условию (9.1),  $\mathcal{M} = [\underline{F}, \overline{F}]$ .

Так как точное распределение не известно, то только нижняя и верхняя границы математического ожидания (ожидаемой полезности) функции  $h(X)$  (функция полезности) могут быть найдены. В работах [131, 133] показано, что границы математического ожидания функции  $h$  при данных условиях вычисляются посредством интегралов Шоке

$$\underline{\mathbb{E}}h = \inf_{\underline{F} \leq F \leq \overline{F}} \int_{\mathbb{R}} h(x) dF(x), \quad \overline{\mathbb{E}}h = \sup_{\underline{F} \leq F \leq \overline{F}} \int_{\mathbb{R}} h(x) dF(x). \quad (9.2)$$

Здесь оптимизация выполняется по всем возможным распределениям, удовлетворяющим условию (9.1), т.е. существует некоторое “оптимальное” распределение среди множества распределений, в соответствии с которым получаем нижнюю границу математического ожидания, а также существует некоторое “оптимальное” распределение, в соответствии с которым получаем верхнюю границу математического ожидания. Поэтому задача вычисления границ ожидаемой полезности сводится к поиску этих оптимальных распределений.

В общем случае приведенная задача может быть приближенно решена численными методами, заменив непрерыв-

ные распределения  $F$  множеством из  $N$  точек  $F(x_i) = z_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . При этом задача вычисления  $\underline{\mathbb{E}}h$  и  $\overline{\mathbb{E}}h$  записывается в виде задач линейного программирования с  $N$  переменными оптимизации

$$\underline{\mathbb{E}}^*h = \inf \sum_{k=1}^N h(x_k)z_k, \quad \overline{\mathbb{E}}^*h = \sup \sum_{k=1}^N h(x_k)z_k$$

при ограничениях

$$z_k \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad \sum_{k=1}^N z_k = 1,$$

$$\sum_{k=1}^i z_k \leq \overline{F}(x_i), \quad \sum_{k=1}^i z_k \geq \underline{F}(x_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Здесь  $z_k$ ,  $k = 1, \dots, N$  – переменные оптимизации, оптимальные значения которых являются значениями “оптимальной” плотности вероятности;  $\underline{\mathbb{E}}^*h$  и  $\overline{\mathbb{E}}^*h$  – приближенные границы математического ожидания функции  $h$ .

Этот путь определения границ математического ожидания наталкивается на вычислительные сложности, когда значение  $N$  является достаточно большим. Действительно, задача оптимизации имеет  $N$  переменных и  $3N+1$  ограничений. С другой стороны, принимая малые значения  $N$ , мы повышаем риск получения слишком приближенных, а также неверных результатов при выборе оптимальной альтернативы в задаче принятия решений.

В то же время очевидно, что оптимальное распределение  $F$  зависит от формы функции  $h$  и этот факт может помочь в поиске более эффективных и простых методов вычисления  $\underline{\mathbb{E}}h$  и  $\overline{\mathbb{E}}h$ .

### 9.3. Постановка задачи в терминах непрерывных случайных множеств

Формально случайное множество можно рассматривать как отображение  $\Gamma$  из вероятностного пространства в множество мощности  $\mathcal{P}o(X)$  другого пространства  $X$  (см. раздел

2.3). Это отображение называется многозначным отображением [24]. Ниже будет использоваться пространство вероятностей  $[0, 1]$  с мерой Лебега и  $\mathcal{P}o(X)$  будет измеримым подмножеством множества  $\mathbb{R}$ .

Пусть дано равномерно непрерывное множество функций в интервале  $[\underline{F}, \overline{F}]$ . Интервал  $A_\gamma = [a_{*\gamma}, a_\gamma^*]$  определяется из условия

$$a_{*\gamma} := \sup\{x \in [a_{\inf}, a_{\sup}] : \overline{F}(x) < \gamma\} = \overline{F}^{-1}(\gamma),$$

$$a_\gamma^* := \inf\{x \in [a_{\inf}, a_{\sup}] : \underline{F}(x) > \gamma\} = \underline{F}^{-1}(\gamma).$$

Обобщая результаты, представленные в работах [13, 25, 60], на непрерывное множество  $\mathbb{R}$ , можно сказать, что задание интервала  $[\underline{F}, \overline{F}]$  для множества распределений эквивалентно заданию непрерывного случайного множества с равномерной плотностью вероятности на  $[0, 1]$  и отображением

$$\Gamma(\gamma) = A_\gamma = [a_{*\gamma}, a_\gamma^*] \quad \gamma \in [0, 1].$$

Главная особенность данного отображения заключается в том, что оно позволяет переписать равенства (9.2) и интеграл Шоке в интеграл Лебега, а именно

$$\underline{\mathbb{E}}_{\underline{F}, \overline{F}} h = \int_0^1 \inf_{x \in A_\gamma} h(x) d\gamma, \quad (9.3)$$

$$\overline{\mathbb{E}}_{\underline{F}, \overline{F}} h = \int_0^1 \sup_{x \in A_\gamma} h(x) d\gamma. \quad (9.4)$$

Поиск аналитического решения этих интегралов в общем случае также является непростой задачей, но приближения могут быть получены достаточно просто, задавая конечное число уровней  $\gamma_i$ . Однако, аналогично подходу с использованием линейного программирования, предлагаемое численное решение может привести к ошибочному принятию решений.

## 9.4. Монотонные функции полезности

Рассмотрим наиболее простой случай, когда функция  $h$  является монотонной на всем множестве ее значений. Если  $h$

является неубывающей, то справедливы следующие выражения [133]:

$$\underline{\mathbb{E}}h = \int_{\mathbb{R}} h(x) d\overline{F}(x), \quad \overline{\mathbb{E}}h = \int_{\mathbb{R}} h(x) dF(x). \quad (9.5)$$

Если  $h$  является невозрастающей, то [133]

$$\underline{\mathbb{E}}h = \int_{\mathbb{R}} h(x) dF(x), \quad \overline{\mathbb{E}}h = \int_{\mathbb{R}} h(x) d\overline{F}(x). \quad (9.6)$$

Приведенные выражения существенно упрощают вычисления, так как для вычисления границ ожидаемой полезности используются только граничные функции распределения, т.е. границы ожидаемой полезности полностью определяются распределениями  $F$  и  $\overline{F}$ .

Используя (9.3)–(9.4), можно получить следующие выражения для неубывающей функции  $h$ :

$$\underline{\mathbb{E}}h = \int_0^1 h(a_{*\gamma}) d\gamma, \quad \overline{\mathbb{E}}h = \int_0^1 h(a_{\gamma}^*) d\gamma,$$

и для невозрастающей функции  $h$

$$\overline{\mathbb{E}}h = \int_0^1 h(a_{\gamma}^*) d\gamma, \quad \underline{\mathbb{E}}h = \int_0^1 h(a_{*\gamma}) d\gamma,$$

которые являются аналогом (9.5)–(9.6). Здесь ожидаемые полезности полностью определяются экстремальными значениями отображения.

**Пример 9.1.** Имеется 1000\$ для инвестирования в акции или облигации (см. аналогичный пример 7.1). Акции – финансовые активы, возврат которых определяется распределением вероятностей, ограниченным равномерными распределениями с ожидаемым возвратом 4% и 6%, а также среднеквадратическим отклонением  $2/\sqrt{3}\%$ . Возврат по облигациям не является случайным и равен 5%. Предполагая, что лицо, принимающее решение, не склонно рисковать, соответствующая функция полезности от уровня дохода  $w$  определяется как  $x(w) = \sqrt{w}$ . Тогда

$$\underline{\mathbb{E}}_{\text{акции}} h = \frac{1}{0.06 - 0.02} \int_{0.02}^{0.06} \sqrt{1000(1+x)} dx = 32.249,$$

$$\bar{\mathbb{E}}_{\text{акции}} h = \frac{1}{0.08 - 0.04} \int_{0.04}^{0.08} \sqrt{1000(1+x)} dx = 32.557,$$

$$\bar{\mathbb{E}}_{\text{облигации}} h = \bar{\mathbb{E}}_{\text{облигации}} h = \sqrt{1000(1+0.05)} = 32.4.$$

Принимая параметр пессимизма  $\gamma = 0.6$ , получим весовые суммы границ ожидаемой полезности как “средних” значений интервалов и сравним их <sup>1</sup>

$$\gamma \bar{\mathbb{E}}_{\text{акции}} h + (1 - \gamma) \bar{\mathbb{E}}_{\text{акции}} h = 32.372 < \bar{\mathbb{E}}_{\text{облигации}} h = 32.4.$$

Отсюда инвестирование в облигации предпочтительнее при условии заданного параметра пессимизма.

## 9.5. Функция полезности с одним максимумом или минимумом

Исследуем случай, когда функция  $h$  имеет один максимум (минимум) в точке  $a \in \mathbb{R}$ , т.е.  $h(x)$  возрастает (убывает) на интервале  $(-\infty, a]$  и убывает (возрастает) на интервале  $[a, \infty)$ .

**Утверждение 9.1.** *Если функция  $h$  имеет один максимум в точке  $a \in \mathbb{R}$ , то границы математического ожидания  $h(X)$  на  $[\underline{F}, \bar{F}]$  имеют вид:*

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}h &= h(a) [\bar{F}(a) - \underline{F}(a)] + \\ &+ \int_{-\infty}^a h(x) d\underline{F}(x) + \int_a^{\infty} h(x) d\bar{F}(x), \end{aligned} \quad (9.7)$$

$$\underline{\mathbb{E}}h = \left[ \int_{-\infty}^{\bar{F}^{-1}(a)} h(x) d\bar{F}(x) + \int_{\underline{F}^{-1}(a)}^{\infty} h(x) d\underline{F}(x) \right]. \quad (9.8)$$

Выражения (9.7)–(9.8) можно переписать в эквивалентной форме

$$\bar{\mathbb{E}}h = \int_0^{\underline{F}(a)} h(a_{\gamma}^*) d\gamma + [\bar{F}(a) - \underline{F}(a)] h(a) + \int_{\bar{F}(a)}^1 h(a_{*\gamma}) d\gamma, \quad (9.9)$$

---

<sup>1</sup>Вопрос сравнения двух интервалов или интервала с точным числом неоднозначный. В примере использовалась процедура сравнения, аналогичная критерию Гурвица с параметром оптимизма  $1 - \gamma$ , без детального обоснования самой процедуры, так как это не является вопросом данного раздела.

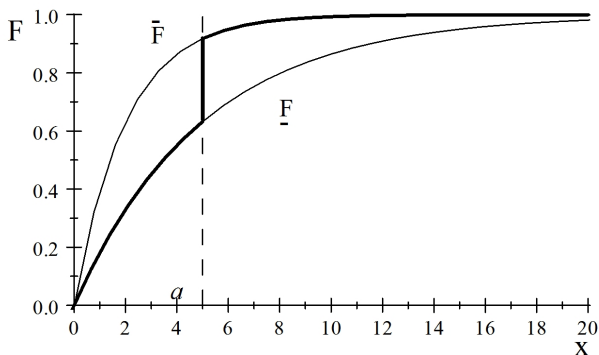


Рис. 9.1. Оптимальная функция распределения (жирная линия) для вычисления верхней границы математического ожидания

$$\mathbb{E}h = \int_0^{\alpha} h(a_{*\gamma})d\gamma + \int_{\alpha}^1 h(a_{\gamma}^*)d\gamma, \quad (9.10)$$

где  $\alpha$  – один из корней уравнения

$$h\left(\bar{F}^{-1}(\alpha)\right) = h\left(\underline{F}^{-1}(\alpha)\right). \quad (9.11)$$

Интересно отметить, что оптимальная функция распределения для вычисления верхней границы математического ожидания имеет скачок в точке  $a$  (см. рис. 9.1). Этот факт был уже отмечен Кузнецовым [161].

Оптимальная функция распределения для вычисления нижней границы математического ожидания имеет интервал постоянного значения  $\alpha$  (область нулевых значений соответствующей функции плотности вероятности, или “горизонтальный” скачок), который накрывает точку  $a$  (см. рис. 9.2).

Если функция  $h$  является симметричной относительно точки максимума  $a$ , т.е. для всех  $x \in \mathbb{R}$  выполняется условие  $h(a-x) = h(a+x)$ , то  $\alpha$  в (9.7)–(9.11) не зависит от вида функции  $h$  и определяется из уравнения

$$a - \bar{F}^{-1}(\alpha) = \underline{F}^{-1}(\alpha) - a. \quad (9.12)$$

Заметим, что выражения (9.5)–(9.6) можно получить из (9.7)–(9.8), принимая  $a \rightarrow \infty$ . Действительно, из условий

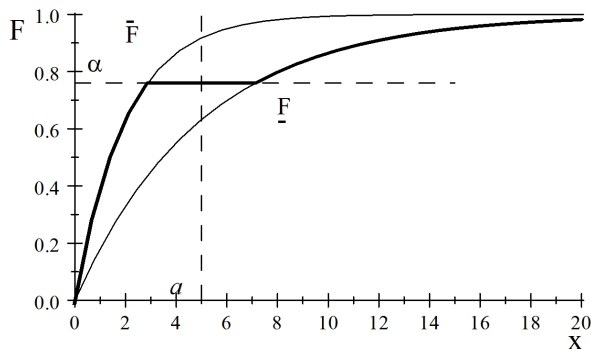


Рис. 9.2. Оптимальная функция распределения (жирная линия) для вычисления нижней границы математического ожидания

$\underline{F}^{-1}(\alpha) \geq a \rightarrow \infty$  и  $\alpha \rightarrow 1$  следует, что  $\overline{F}^{-1}(\alpha) \rightarrow \infty$ , и получаем (9.5)–(9.6). Другими словами, выражения (9.5)–(9.6) можно рассматривать как частный случай выражений (9.7)–(9.8).

**Утверждение 9.2.** Если функция  $h$  имеет один минимум в точке  $a \in \mathbb{R}$ , то верхняя и нижняя границы математического ожидания  $h(X)$  на  $[\underline{F}, \overline{F}]$  определяются посредством (9.8) и (9.7) соответственно.

**Доказательство.** Доказательство следует из равенств  $\underline{\mathbb{E}}(-h) = -\overline{\mathbb{E}}h$  и  $\overline{\mathbb{E}}(-h) = -\underline{\mathbb{E}}h$  [131]. ■

**Пример 9.2.** Предположим, что потери после отказа системы характеризуются функцией времени  $h(x) = 60 - (x - 5)^2$ . Также известно, что случайное время до отказа системы имеет распределение, находящееся в границах двух экспоненциальных распределений с интенсивностями отказов 0.2 и 0.5 соответственно, т.е.  $\underline{F}(x) = 1 - \exp(-0.2x)$  и  $\overline{F}(x) = 1 - \exp(-0.5x)$ . Функция  $h$  имеет максимум в точке  $a = 5$ . Найдем границы ожидаемых потерь. Верхняя граница равна

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}}h &= h(5) [\overline{F}(5) - \underline{F}(5)] + \\ &+ \int_0^5 h(x) d\underline{F}(x) + \int_5^\infty h(x) d\overline{F}(x) = \\ &= 60 \cdot (\exp(-0.5 \cdot 5) - \exp(-0.2 \cdot 5)) + \\ &+ 31.321 + 4.268 = 52.736. \end{aligned}$$



Так как  $\overline{F}^{-1}(\alpha) = -2 \ln(1 - \alpha)$  и  $\underline{F}^{-1}(\alpha) = -5 \ln(1 - \alpha)$ , то  $\alpha$  найдем из уравнения

$$60 - (-2 \ln(1 - \alpha) - 5)^2 = 60 - (-5 \ln(1 - \alpha) - 5)^2.$$

Искомое решение  $\alpha = 1 - \exp(-10/7)$ . Отсюда нижняя граница равна  $\underline{\mathbb{E}}h = 29.745$ . Таким образом, ожидаемые потери находятся в интервале  $[29.745, 52.736]$ .

Приведенный пример показывает, что оптимизационная задача (9.2) может быть решена в явном виде при определенных условиях.

## 9.6. Условные математические ожидания

Рассмотрим случай, когда функция полезности  $h$  имеет один максимум и наблюдается событие  $B = [b_0, b_1] \subset \mathbb{R}$ , являющееся подмножеством множества состояний природы. После наблюдения события ожидаемая полезность становится условной, и ее новые границы определяются из следующих задач оптимизации:

$$\underline{\mathbb{E}}(h|B) = \inf_{\underline{F} \leq F \leq \overline{F}} \frac{\int_{\mathbb{R}} h(x) I_B(x) dF(x)}{\int_{\mathbb{R}} I_B(x) dF(x)},$$

$$\overline{\mathbb{E}}(h|B) = \sup_{\underline{F} \leq F \leq \overline{F}} \frac{\int_{\mathbb{R}} h(x) I_B(x) dF(x)}{\int_{\mathbb{R}} I_B(x) dF(x)}.$$

Здесь  $I_B(x)$  – индикаторная функция, такая что  $I_B(x) = 1$ , если  $x \in B$ ,  $I_B(x) = 0$ , если  $x \notin B$ . Поиск оптимальных решений осуществляется по множеству функций распределений  $[\underline{F}, \overline{F}]$ .

В общем, представленные задачи оптимизации могут быть решены приближенно, взяв  $N$  точек функций распределения  $F(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . В этом случае получаем задачи дробно-линейного программирования, которые сводятся к стандартному линейному программированию достаточно простыми преобразованиями. Тем не менее имеет смысл рассмотреть более эффективный алгоритм, учитывающий свойства функции  $h$ .

**Утверждение 9.3.** Если функция  $h$  имеет один максимум в точке  $a \in \mathbb{R}$ , то нижняя и верхняя границы условного математического ожидания функции  $h(X)$  на  $[\underline{F}, \overline{F}]$  после наблюдения события  $B$  имеют вид:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{E}}(h|B) &= \sup_{\substack{\underline{F}(b_0) \leq \alpha \leq \overline{F}(b_0) \\ \underline{F}(b_1) \leq \beta \leq \overline{F}(b_1)}}} \frac{1}{\beta - \alpha} \Psi(\alpha, \beta), \\ \underline{\mathbb{E}}(h|B) &= \inf_{\substack{\underline{F}(b_0) \leq \alpha \leq \overline{F}(b_0) \\ \underline{F}(b_1) \leq \beta \leq \overline{F}(b_1)}}} \frac{1}{\beta - \alpha} \Phi(\alpha, \beta), \\ \Psi(\alpha, \beta) &= I(\alpha < \underline{F}^{-1}(a)) \int_{\underline{F}^{-1}(\alpha)}^a h(x) d\underline{F}(x) + \\ &+ I(\beta > \overline{F}^{-1}(a)) \int_a^{\overline{F}^{-1}(\beta)} h(x) d\overline{F}(x) + \\ &+ h(a) (\min(\overline{F}(a), \beta) - \max(\underline{F}(a), \alpha)) = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sup_{x \in A_{\gamma}} h(x) d\gamma, \\ \Phi(\alpha, \beta) &= h(b_0) (\overline{F}(b_0) - \alpha) + \int_{b_0}^{\overline{F}^{-1}(\varepsilon)} h(x) d\overline{F}(x) + \\ &+ h(b_1) (\beta - \underline{F}(b_1)) + \int_{\underline{F}^{-1}(\varepsilon)}^{b_1} h(x) d\underline{F}(x) = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \inf_{x \in A_{\gamma}} h(x) d\gamma.\end{aligned}$$

Здесь  $I(a < b)$  – индикаторная функция, принимающая значение 1, если  $a < b$ , и 0, если  $a \geq b$ ;  $\varepsilon$  – один из корней уравнения

$$h(\overline{F}^{-1}(\varepsilon)) = h(\underline{F}^{-1}(\varepsilon)).$$

**Доказательство.** Рассмотрим верхнюю границу условной ожидаемой полезности. Не зная, как ведет себя оптимальная функция распределения вероятностей вне интервала  $B$ , очевидно, что в точке  $b_0$  ее значение –  $F(b_0) = \alpha \in [\underline{F}(b_0), \overline{F}(b_0)]$

и в точке  $b_1$  ее значение  $-F(b_1) = \beta \in [\underline{F}(b_1), \overline{F}(b_1)]$  (см. рис. 9.3). Тогда выполняется условие

$$\int_{\mathbb{R}} I_B(x) dF(x) = \beta - \alpha.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}}(h|B) &= \sup_{\substack{\underline{F}(b_0) \leq \alpha \leq \overline{F}(b_0) \\ \underline{F}(b_1) \leq \beta \leq \overline{F}(b_1) \\ \underline{F} \leq F \leq \overline{F}}} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\mathbb{R}} h(x) I_B(x) dF(x) = \\ &= \sup_{\substack{\underline{F}(b_0) \leq \alpha \leq \overline{F}(b_0) \\ \underline{F}(b_1) \leq \beta \leq \overline{F}(b_1)}} \frac{1}{\beta - \alpha} \left( \sup_{\substack{\underline{F} \leq F \leq \overline{F} \\ \underline{F}(b_0) = \alpha \\ \underline{F}(b_1) = \beta}} \int_{\mathbb{R}} h(x) I_B(x) dF(x) \right) = \\ &= \sup_{\substack{\underline{F}(b_0) \leq \alpha \leq \overline{F}(b_0) \\ \underline{F}(b_1) \leq \beta \leq \overline{F}(b_1)}} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \sup_{x \in A_{\gamma}} h(x) d\gamma. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Здесь  $A_{\gamma} = B \cap [\underline{F}^{-1}(\gamma), \overline{F}^{-1}(\gamma)]$ . Используя результаты, полученные для безусловного математического ожидания, можно увидеть, что искомый интеграл равен  $\Psi(\alpha, \beta)$ . Нижняя граница доказывается аналогично. ■

Один из возможных (наиболее общих) вариантов оптимальной функции распределения для вычисления верхней границы условного математического ожидания приведен на рис. 9.3.

Интересно отметить, что увеличение значения  $\beta - \alpha$  в выражениях для верхней границы ожидаемой полезности ведет к увеличению  $\Psi(\alpha, \beta)$ , т.е. числитель и знаменатель играют противоположные роли. К сожалению, задачу вычисления границ условной ожидаемой полезности в общем случае нельзя решить в явном виде и требуется алгоритм для поиска приближенного решения путем дискретизации переменных  $\alpha$  и  $\beta$  в интервалах  $[\underline{F}(b_0), \overline{F}(b_0)]$  и  $[\underline{F}(b_1), \overline{F}(b_1)]$  соответственно.

Если  $b_0 \rightarrow -\infty$  и  $b_1 \rightarrow \infty$ , то  $\alpha = 0$  и  $\beta = 1$ . Это случай,

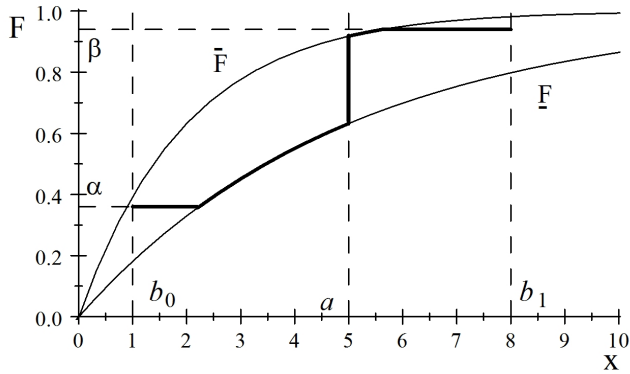


Рис. 9.3. Оптимальная функция распределения (жирная линия) для вычисления верхней границы условного математического ожидания при  $B = [1, 8]$

когда событие  $B$  отсутствует. Отсюда

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}}(h|B) &= \overline{\mathbb{E}}h = \Psi(\alpha, \beta) = \\ &= \int_{-\infty}^a h(x) d\underline{F}(x) + \int_a^{\infty} h(x) d\overline{F}(x) + \\ &+ h(a) (\overline{F}(a) - \underline{F}(a)), \end{aligned}$$

что совпадает с выражением для верхней границы безусловной ожидаемой полезности, полученным ранее. Аналогичное совпадение можно получить и для нижней границы  $\underline{\mathbb{E}}(h|B)$ .

Внимательный просмотр доказательства утверждения 9.3 показывает, что оно справедливо для произвольных функций  $h$ . Следовательно, можно найти границы условного математического ожидания монотонной функции  $h$ . Пусть  $h$  – возрастающая функция на множестве значений<sup>2</sup>  $[b_0, b_1]$ . Из (9.13) следует, что

$$\overline{\mathbb{E}}(h|B) = \sup_{\substack{\underline{F}(b_0) \leq \alpha \leq \overline{F}(b_0) \\ \underline{F}(b_1) \leq \beta \leq \overline{F}(b_1)}} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} h(a_{\gamma}^*) d\gamma.$$

<sup>2</sup>Здесь важным является только поведение функции  $h$  и всех других функций только в пределах интервала  $B$ .

Заметим, что функция  $h(a_\gamma^*)$  возрастает с ростом  $\gamma$ . Используя теорему о среднем значении интеграла, запишем  $\bar{\mathbb{E}}(h|B) = h(z)$ , где  $z \in [\alpha, \beta]$ . При этом для максимизации  $\bar{\mathbb{E}}(h|B)$  значение  $z$  должно быть как можно больше в силу возрастания функции  $h$ . Это имеет место при выборе максимально возможных значений  $\alpha, \beta$ , т.е.  $\alpha = \bar{F}(b_0)$  и  $\beta = \bar{F}(b_1)$ . Тогда оптимальная функция распределения вероятностей совпадает с функцией, изображенной на рис. 9.3, при условии, что  $a \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}(h|B) &= \frac{1}{\bar{F}(b_1) - \bar{F}(b_0)} \int_{\underline{F}^{-1}(\bar{F}(b_0))}^{b_1} h(x) d\underline{F}(x) + \\ &+ h(b_1) (\bar{F}(b_1) - \underline{F}(b_1)). \end{aligned}$$

Аналогичное выражение можно записать и для нижней границы ожидаемой полезности.

## 9.7. Р-блоки и функции доверия

При моделировании неполноты информации существенную роль играют р-блоки, образованные ступенчатыми граничными функциями распределения вероятностей вида [60]:

$$\begin{aligned} \underline{F}(x) &= \begin{cases} 0, & x < x_{*1} \\ \underline{F}(x_{*i}), & x_{*i} \leq x \leq x_{*i+1} \\ 1 & x_{*n} \leq x \end{cases}, \\ \bar{F}(x) &= \begin{cases} 0, & x < x_1^* \\ \bar{F}(x_{j+1}^*), & x_j^* \leq x \leq x_{j+1}^* \\ 1 & x_m^* \leq x \end{cases}, \end{aligned} \quad (9.14)$$

где  $x_{*1} \leq \dots \leq x_{*n}$  и  $x_1^* \leq \dots \leq x_m^*$  — упорядоченные последовательности точек на  $\mathbb{R}$ .

Другими словами, нижняя и верхняя функции распределения являются непрерывными справа и неубывающими ступенчатыми функциями, принимающими значения в интервале  $[0, 1]$  и имеющими по крайней мере  $n$  или  $m$  разрывов в точках  $x_{*1}, \dots, x_{*n}$  или  $x_1^*, \dots, x_m^*$ .

Очевидно, что результаты, полученные выше (утверждение 9.1), могут использоваться и в случае ступенчатых граничных функций распределения. Так, границы математического ожидания функции  $h$ , имеющей один максимум в точке  $a \in \mathbb{R}$ , имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}h &= h(a) [\overline{F}(a) - \underline{F}(a)] + \\ &+ \sum_{i:x_{*i} \leq a} h(x_{*i}) [\underline{F}(x_{*i}) - \underline{F}(x_{*i-1})] + \\ &+ \sum_{j:x_j^* \geq a} h(x_j^*) [\overline{F}(x_{j+1}^*) - \overline{F}(x_j^*)], \end{aligned} \quad (9.15)$$

$$\mathbb{E}h = \min_{\alpha \in \Phi} \left[ \sum_{j:x_j^* \leq a} h(x_j^*) T_\alpha(x_j^*) + \sum_{i:x_{*i} \geq a} h(x_{*i}) R_\alpha(x_{*i}) \right]. \quad (9.16)$$

Здесь

$$T_\alpha(x_j^*) = \begin{cases} \overline{F}(x_{j+1}^*) - \overline{F}(x_j^*), & \overline{F}(x_j^*) < \alpha, \overline{F}(x_{j+1}^*) \leq \alpha, \\ \alpha - \overline{F}(x_j^*), & \overline{F}(x_j^*) < \alpha, \overline{F}(x_{j+1}^*) > \alpha, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$R_\alpha(x_{*i}) = \begin{cases} \underline{F}(x_{*i}) - \underline{F}(x_{*i-1}), & \underline{F}(x_{*i}) > \alpha, \underline{F}(x_{*i-1}) \geq \alpha, \\ \underline{F}(x_{*i}) - \alpha, & \underline{F}(x_{*i}) > \alpha, \underline{F}(x_{*i-1}) < \alpha, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

значение  $\alpha$  выбирается из конечного множества значений

$$\Phi = \{\overline{F}(x_{j+1}^*), j = 1, \dots, m\} \cup \{\underline{F}(x_{*i}), i = 1, \dots, n\}.$$

Выражения (9.15)–(9.16) являются одним из способов вычисления границ ожидаемой полезности. Однако можно рассмотреть другой способ, основанный на преобразовании р-блоков в случайные множества. Оказывается, что существует строгая связь между р-блоками типа (9.14) и функциями доверия в рамках теории Демпстера–Шейфера. Эта связь изучалась в работах Ягера [143], Ферсона и др. [13], Криглера и Хельда [60]. Если оценки случайной величины даны в виде

замкнутых интервалов  $A_i = [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , а  $c_i$  означает число появления интервала  $A_i$ , то границы распределений определяются следующим образом (см. раздел 2.4):

$$\underline{F}(x) = \text{Bel}((-\infty, x]) = \sum_{i: \bar{a}_i \leq x} c_i/N = \sum_{i: \bar{a}_i \leq x} m(A_i),$$

$$\bar{F}(x) = \text{Pl}((-\infty, x]) = \sum_{i: \underline{a}_i \leq x} c_i/N = \sum_{i: \underline{a}_i \leq x} m(A_i).$$

С другой стороны, в работе [13] показано, что на основе функций доверия можно всегда получить р-блок типа (9.14) и наоборот<sup>3</sup>. Более того, в работе [60] предложен алгоритм построения случайного множества на основе имеющегося р-блока.

### Алгоритм (Криглер и Хельд [60]):

- 1) Инициализация индексов  $k = 1$  (перебор фокальных элементов случайного множества, которое должно быть построено),  $i = 1$  (перебор всех  $x_{*i}$ ),  $j = 1$  (перебор всех  $x_j^*$ ). Пусть  $p_k$  – значение функции распределения вероятностей, вычисленной на  $k$ -й итерации. Пусть  $p_0 = 0$ .
- 2) Фокальный элемент –  $A_k = (x_j^*, x_{*i}]$ .
- 3) Если  $j = m$ , то выбираем произвольно  $x_{m+1}^* > x_m^*$ , так что  $\bar{F}(x_{m+1}^*) = 1$ :
  - а)  $\underline{F}(x_{*i}) < \bar{F}(x_{j+1}^*)$ :  
 $m(A_k) = \underline{F}(x_{*i}) - p_{k-1}$ ,  $p_k = \underline{F}(x_{*i})$ ,  
 увеличиваем индексы  $k \rightarrow k + 1$ ,  $i \rightarrow i + 1$ ,  
 возврат к шагу 2;
  - б)  $\underline{F}(x_{*i}) > \bar{F}(x_{j+1}^*)$ :  
 $m(A_k) = \bar{F}(x_{j+1}^*) - p_{k-1}$ ,  $p_k = \bar{F}(x_{j+1}^*)$ ,  
 увеличиваем индексы  $k \rightarrow k + 1$ ,  $j \rightarrow j + 1$ ,  
 возврат к шагу 2;

---

<sup>3</sup>В случае произвольных граничных функций распределения вероятностей р-блока можно всегда найти приближенное случайное множество.

в)  $\underline{F}(x_{*i}) = \overline{F}(x_{j+1}^*)$ :  
 $m(A_k) = \overline{F}(x_{j+1}^*) - p_{k-1}$ ,  
если  $\underline{F}(x_{*i}) = \overline{F}(x_{j+1}^*) = 1$ , **стоп**.  
если  $\underline{F}(x_{*i}) = \overline{F}(x_{j+1}^*) < 1$ , то  $p_k = \overline{F}(x_{j+1}^*)$ ,  
увеличиваем индексы  $k \rightarrow k+1, i \rightarrow i+1, j \rightarrow j+1$ ,  
Возврат к шагу 2.

Другой алгоритм был предложен Дестерке и Дюбуа [25].

Теперь границы ожидаемой полезности можно найти в рамках теории Демпстера–Шейфера [66, 80]:

$$\underline{\mathbb{E}}^{\#}h = \sum_{i=1}^n m(A_i) \inf_{a_i \leq x \leq \bar{a}_i} h(x),$$

$$\overline{\mathbb{E}}^{\#}h = \sum_{i=1}^n m(A_i) \sup_{a_i \leq x \leq \bar{a}_i} h(x). \quad (9.17)$$

Достаточно легко доказать [114], что  $\overline{\mathbb{E}}h = \overline{\mathbb{E}}^{\#}h$  и  $\underline{\mathbb{E}}h = \underline{\mathbb{E}}^{\#}h$ .

**Пример 9.3.** Вернемся к примеру 9.2 и предположим, что нижнее и верхнее распределения вероятностей имеют вид, изображенный на рис. 9.4.

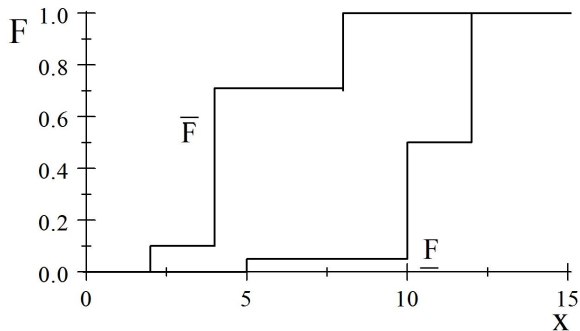


Рис. 9.4. Нижнее и верхнее распределения р-блока

Здесь  $x_{*1} = 5, x_{*2} = 10, x_{*3} = 12, x_1^* = 2, x_2^* = 4, x_3^* = 8,$   
 $\underline{F}(x_{*1}) = 0.05, \underline{F}(x_{*2}) = 0.5, \underline{F}(x_{*3}) = 1, \overline{F}(x_1^*) = 0.1, \overline{F}(x_2^*) = 0.7,$



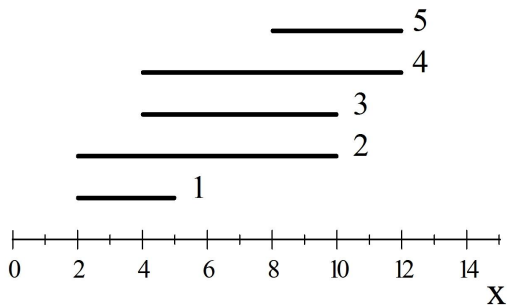


Рис. 9.5. Фокальные элементы

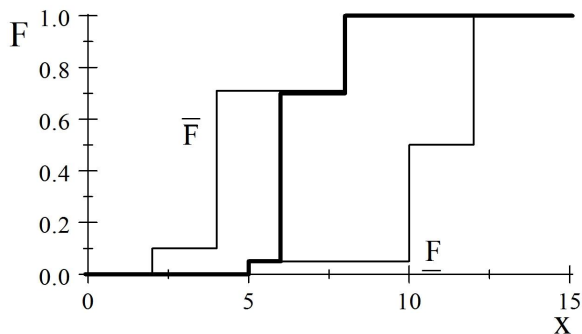


Рис. 9.6. Оптимальное распределение (жирная линия) для вычисления нижней границы математического ожидания

$\bar{F}(x_1^*) = 1$ . Оптимальные распределения вероятностей, соответствующие верхней и нижней границам математического ожидания функции  $h(x) = 60 - (x - 5)^2$ , показаны жирной линией на рис. 9.6 и рис. 9.7 соответственно. Отсюда  $\underline{\mathbb{E}}h = 23.8$  и  $\bar{\mathbb{E}}h = 57.3$ .

Используя алгоритм, предложенный Криглером и Хельдом [60], запишем соответствующие фокальные элементы (см. рис.9.5) и их базовые вероятности:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= [2, 5], \quad A_2 = [2, 10], \quad A_3 = [4, 10], \\
 A_4 &= [4, 12], \quad A_5 = [8, 12], \\
 c_1 &= 1, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 8, \quad c_4 = 4, \quad c_5 = 6, \\
 m(A_1) &= 0.05, \quad m(A_2) = 0.05, \quad m(A_3) = 0.4,
 \end{aligned}$$

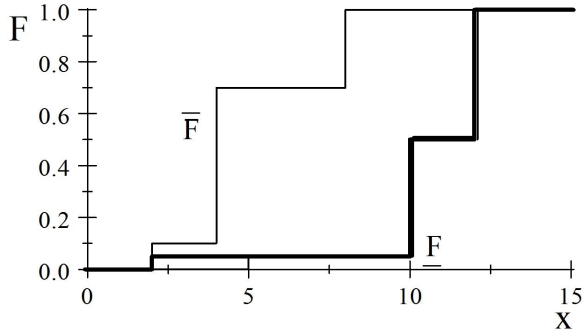


Рис. 9.7. Оптимальное распределение (жирная линия) для вычисления верхней границы математического ожидания

$$m(A_4) = 0.2, \quad m(A_5) = 0.3.$$

Отсюда можно найти нижнюю и верхнюю границы математического ожидания функции  $h$ , используя (9.17), следующим образом:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{E}}^\# h &= 0.05h(2) + 0.05h(10) + 0.4h(10) + 0.2h(12) + 0.3h(12) = \\ &= 23.8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}}^\# h &= 0.05h(5) + 0.05h(5) + 0.4h(5) + 0.2h(5) + 0.3h(8) = \\ &= 57.3. \end{aligned}$$

## 9.8. Распределение возможностей

Так как неполнота информации может моделироваться с использованием аппарата теории возможностей [27, 146] (см. главу 3), целесообразно рассмотреть вычисление ожидаемой полезности при условии, что состояния природы характеризуются распределением возможностей и  $\Omega = \mathbb{R}$ .

В главе 3 показано, что два способа интерпретации распределения возможностей являются наиболее используемыми и обоснованными. Первый способ заключается в описании функции распределения возможностей, верхней  $\overline{F}(x)$  и

нижней  $\underline{F}(x)$ , функциями распределения вероятностей (3.3)–(3.4), которые в свою очередь образуют множество распределений вероятностей  $\mathcal{M}_1$ . Отсюда нижнюю и верхнюю границы математического ожидания функции  $h$  можно определить, используя (9.2). Будем считать, что функция распределения возможностей имеет максимум в точке  $x_0$ , т.е.  $\pi(x_0) = 1$ . Если функция  $h$  имеет один максимум в точке  $a \in \mathbb{R}$ , то из утверждения 9.1 следует, что следующие три случая должны быть рассмотрены.

Если  $a < x_0$ , то

$$\bar{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}_1} h = h(a)\bar{F}(a) + \int_a^{x_0} h(x)d\bar{F}(x).$$

Если  $a > x_0$ , то

$$\bar{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}_1} h = h(a)[1 - \underline{F}(a)] + \int_{x_0}^a h(x)d\underline{F}(x).$$

Если  $a = x_0$ , то  $\bar{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}_1} h = h(a)$ .

Учитывая тот факт, что

$$\pi(x) = \begin{cases} 1 - \underline{F}(x), & x \geq x_0 \\ \bar{F}(x), & x < x_0 \end{cases},$$

получим выражение для верхней границы ожидаемой полезности

$$\bar{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}_1} h = \begin{cases} h(a)\pi(a) + \int_a^{x_0} h(x)d\pi(x), & a < x_0 \\ h(a), & a = x_0 \\ h(a)\pi(a) - \int_{x_0}^a h(x)d\pi(x), & a > x_0 \end{cases}.$$

Нижняя граница ожидаемой полезности может быть получена из (9.8) аналогичным образом

$$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}_1} h = \int_{-\infty}^{\pi_-^{-1}(\alpha)} h(x)d\pi(x) - \int_{(1-\pi_+)^{-1}(\alpha)}^{\infty} h(x)d\pi(x).$$

Здесь  $\pi_-$  и  $\pi_+$  – левая и правая ветви функции распределения возможностей соответственно;  $\alpha$  определяется из модификации уравнения (9.11)

$$h(\pi_-^{-1}(\alpha)) = h((1 - \pi_+)^{-1}(\alpha)).$$

**Пример 9.4.** На практике, в целях упрощения расчетов, используется треугольная форма функции распределения возможностей, предложенная в работе [27] и имеющая вид

$$\pi(x) = \begin{cases} (x - a_1)/(x_0 - a_1), & a_1 < x \leq x_0 \\ (a_2 - x)/(a_2 - x_0), & x_0 < x \leq a_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} .$$

Предположим, что  $h = 60 - (x - 5)^2$ ,  $a_1 = 2$ ,  $x_0 = 3$ ,  $a_2 = 10$ . Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}_1} h &= (60 - (5 - 5)^2) \frac{5}{7} - \int_3^5 (60 - (x - 5)^2) \frac{1}{7} dx = \\ &= 59.62. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\pi_-^{-1}(\alpha) = \alpha(x_0 - a_1) + a_1, \quad (1 - \pi_+)^{-1}(\alpha) = \alpha(a_2 - x_0) + x_0.$$

Из (9.12) следует, что  $\alpha$  может быть найдено из уравнения

$$z - (\alpha(x_0 - a_1) + a_1) = \alpha(a_2 - x_0) + x_0 - z.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{a_1 - a_2} (a_1 + x_0 - 2z) = 0.625, \\ \pi_-^{-1}(0.625) &= 2.625, \quad (1 - \pi_+)^{-1}(0.625) = 7.375 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}_1} h &= \int_2^{2.625} (60 - (x - 5)^2) dx + \frac{1}{7} \int_{7.375}^{10} (60 - (x - 5)^2) dx = \\ &= 50.15. \end{aligned}$$

Таким образом, ожидаемая полезность находится в интервале [50.15, 59.62].

Теперь рассмотрим второй способ интерпретации функции распределения возможностей в рамках теории случайных множеств. Интервал  $B_\gamma = [b_{*\gamma}, b_\gamma^*]$ ,  $\gamma \in [0, 1]$ , определим из условия

$$b_{*\gamma} = \pi_-^{-1}(\gamma), \quad b_\gamma^* = \pi_+^{-1}(\gamma).$$

Используя определение математического ожидания для случайного множества, запишем границы ожидаемой полезности:

$$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}_2} h = \int_0^1 \inf_{x \in B_\gamma} h(x) d\gamma,$$

$$\bar{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}_2} h = \int_0^1 \sup_{x \in B_\gamma} h(x) d\gamma.$$

Для немонотонной функции полезности  $h$  нижняя граница математического ожидания имеет вид

$$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}_2} h = \int_0^\beta h(\pi_+^{-1}(\gamma)) d\gamma + \int_\beta^1 h(\pi_-^{-1}(\gamma)) d\gamma,$$

где  $\beta$  – корень уравнения

$$h(\pi_+^{-1}(\beta)) = h(\pi_-^{-1}(\beta)). \quad (9.18)$$

Приведенное выражение можно переписать в другой форме

$$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}_2} h = \int_{-\infty}^{\pi_-^{-1}(\beta)} h(x) d\pi(x) - \int_{(1-\pi_+)^{-1}(\beta)}^{\infty} h(x) d\pi(x).$$

Как видно из последнего равенства, определение нижней границы ожидаемой полезности для второго способа интерпретации распределения возможностей почти совпадает с определением нижней границы ожидаемой полезности в рамках первого способа интерпретации, за исключением вычисления значения  $\beta$ . Однако верхние границы ожидаемой полезности для обоих способов полностью совпадают.

Нетрудно доказать, что для монотонных функций полезности  $h$  обе границы ожидаемой полезности для обоих способов интерпретации распределения возможностей совпадают, т.е.  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}_1} h = \underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}_2} h$  и  $\bar{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}_1} h = \bar{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}_2} h$ . Однако это свойство не обязательно выполняется в случае немонотонной функции  $h$  [176].

**Пример 9.5.** Вернемся к предыдущему примеру и найдем нижнюю границу  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}_2} h$ . Для второго способа интерпретации  $\pi$  получаем  $\beta = 1/3$  и  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}_2} h = 51.3$ . Из полученного результата следует, что  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}_2} h \geq \underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}_1} h$ . Следовательно, при немонотонной функции полезности второе представление распределения возможностей позволяет получить более точное решение и принять более оптимальное решение. Необходимо отметить, что полученные результаты согласуются с тезисом Баудрита и Дюбуа [5], согласно которому представление семейства вероятностей нечетким интервалом ( $\mathcal{M}_2$ ) является более точным, чем парой функций распределений ( $\mathcal{M}_1$ ).

## 9.9. Функция двух переменных с одним максимумом

Рассмотрим функцию  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , которая зависит от двух переменных  $X$  и  $Y$ . В этом случае  $p$ -блоки имеют вид:

$$\underline{F}(x, y) \leq F(x, y) \leq \overline{F}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Предполагается, что  $h$  имеет один глобальный максимум в точке  $(x_0, y_0)$ . Кроме того, уравнения  $\partial h(x, z)/\partial x = 0$  и  $\partial h(z, y)/\partial y = 0$  имеют соответственно решения в точках  $x = x_0$  и  $y = y_0$ .

Пусть  $B_\kappa = [b_{*\kappa}, b_\kappa^*]$  – маргинальное случайное множество величины  $Y$ , где

$$b_{*\kappa} := \sup\{y \in [b_{\text{inf}}, b_{\text{sup}}] : \overline{F}(y) < \kappa\} = \overline{F}^{-1}(\kappa),$$

$$b_\kappa^* := \inf\{y \in [b_{\text{inf}}, b_{\text{sup}}] : \underline{F}(y) > \kappa\} = \underline{F}^{-1}(\kappa).$$

Кроме того, используя определения Сметса [78], касающиеся непрерывных случайных множеств, обозначим базовые плотности доверия<sup>4</sup>  $f_X^M$  и  $f_Y^M$ , соответствующие маргинальным случайным множествам  $[\underline{F}, \overline{F}]_X, [\underline{F}, \overline{F}]_Y$ .

Так как случайные величины  $X$  и  $Y$  описываются множествами распределений, то математическое ожидание или его границы зависят от типа независимости [15] между  $X$  и  $Y$ . Поэтому ниже рассматриваются методы определения границ  $\mathbb{E}h$  при условии строгой независимости, независимости случайных множеств и отсутствия информации о независимости.

### 9.9.1. Строгая независимость

В случае строгой независимости  $X$  и  $Y$  совместная функция распределения равна произведению маргинальных функций. Тогда

$$\underline{\mathbb{E}}h = \inf_{F_1 \leq \overline{F}_1} \inf_{F_2 \leq \overline{F}_2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x, y) dF_1 dF_2,$$

<sup>4</sup>Базовые плотности доверия являются расширением базовых вероятностей для случая бесконечного числа вложенных фокальных элементов.

$$\bar{\mathbb{E}}h = \sup_{F_1 \leq \bar{F}_1} \sup_{F_2 \leq \bar{F}_2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x, y) dF_1 dF_2.$$

Простейший случай имеет место тогда, когда функция  $h$  может быть представлена как  $h(X, Y) = h_1(X)h_2(Y)$ . Тогда  $\underline{\mathbb{E}}h = \underline{\mathbb{E}}h_1 \cdot \underline{\mathbb{E}}h_2$  и  $\bar{\mathbb{E}}h = \bar{\mathbb{E}}h_1 \cdot \bar{\mathbb{E}}h_2$ . Однако наибольший интерес представляет функция  $h$ , которая не является произведением функций, зависящих только от  $X$  и  $Y$  соответственно.

Зафиксируем  $Y$  в точке  $z$  и обозначим

$$\xi(z) = \int_{\mathbb{R}} h(x, z) dF_1(x).$$

Тогда

$$\mathbb{E}h(X, Y) = \int_{\mathbb{R}} \xi(z) dF_2(z).$$

Отсюда, в соответствии с утверждением 9.1, можно записать

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}h(X, z) &= \sup_{F_1 \leq \bar{F}_1} \xi(z) = h(x_0, z) [\bar{F}_1(x_0) - \underline{F}_1(x_0)] + \\ &+ \int_{-\infty}^z h(x, z) d\underline{F}_1 + \int_z^{\infty} h(x, z) d\bar{F}_1. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Из предположений о поведении функции  $h(X, Y)$  следует, что функция  $\xi(z)$  имеет максимум в точке  $z = y_0$  и является монотонной в интервалах  $(-\infty, y_0)$  и  $(y_0, \infty)$ . Тогда оптимальное распределение вероятностей  $F_2$  имеет форму, рассмотренную в утверждении 9.1. Кроме того, неравенство

$$\sup_{F_2 \leq \bar{F}_2} \int_{\mathbb{R}} \xi(z) dF_2(z) \geq \sup_{F_2 \leq \bar{F}_2} \int_{\mathbb{R}} \hat{\xi}(z) dF_2(z)$$

выполняется, если выполняется условие  $\xi(z) \geq \hat{\xi}(z)$ . Из вышеизложенного получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}h(X, Y) &= \sup_{F_2 \leq \bar{F}_2} \int_{\mathbb{R}} \bar{\mathbb{E}}(h(X, z)) dF_2(z) = \\ &= \sup \xi(y_0) [\bar{F}_2(y_0) - \underline{F}_2(y_0)] + \\ &+ \int_{-\infty}^{y_0} \sup \xi(z) d\underline{F}_2(z) + \int_{y_0}^{\infty} \sup \xi(z) d\bar{F}_2(z), \end{aligned}$$

где  $\sup \xi(z)$  определяется из (9.19).

Следовательно, верхняя граница математического ожидания при условии строгой независимости может быть найдена почти в явном виде. Это не выполняется для нижней границы, так как из первого доказательства утверждения 9.1 следует, что  $\inf \xi(z)$  находится в этом случае как решение уравнения

$$h(\overline{F}_1^{-1}(\alpha), z) = h(\underline{F}_1^{-1}(\alpha), z),$$

где корень  $\alpha$  зависит от  $z$ . Обозначая эту зависимость  $\alpha_z$ , тем не менее можно вывести следующую формулу:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{E}}h(X, Y) &= \inf_{F_2 \leq F_2 \leq \overline{F}_2} \int_{\mathbb{R}} \underline{\mathbb{E}}(h(X, z)) dF_2(z) = \\ &= \int_{-\infty}^{\overline{F}_2^{-1}(\beta)} \int_{-\infty}^{\overline{F}_1^{-1}(\alpha_z)} h(x, z) d\overline{F}_1 d\overline{F}_2 + \\ &+ \int_{-\infty}^{\overline{F}_2^{-1}(\beta)} \int_{\underline{F}_1^{-1}(\alpha_z)}^{\infty} h(x, z) d\underline{F}_1 d\overline{F}_2 + \\ &+ \int_{\underline{F}_2^{-1}(\beta)}^{\infty} \int_{-\infty}^{\overline{F}_1^{-1}(\alpha_z)} h(x, z) d\overline{F}_1 d\underline{F}_2 + \\ &+ \int_{\underline{F}_2^{-1}(\beta)}^{\infty} \int_{\underline{F}_1^{-1}(\alpha_z)}^{\infty} h(x, z) d\underline{F}_1 d\underline{F}_2, \end{aligned}$$

где  $\beta$  – корень уравнения

$$\underline{\mathbb{E}}h(X, \underline{F}_2^{-1}(\beta)) = \underline{\mathbb{E}}h(X, \overline{F}_2^{-1}(\beta)).$$

Следует отметить, что только приближенное значение нижней границы может быть найдено.

### 9.9.2. Независимость случайных множеств

Нижняя и верхняя границы математического ожидания функции  $h$  при условии независимости случайных множеств вычисляются на основе следующих выражений:

$$\underline{\mathbb{E}}h = \int_0^1 \int_0^1 \inf_{(x,y) \in [B_\kappa \times A_\gamma]} h(x, y) d\kappa d\gamma,$$



$$\bar{\mathbb{E}}h = \int_0^1 \int_0^1 \sup_{(x,y) \in [B_\kappa \times A_\gamma]} h(x,y) d\kappa d\gamma.$$

Границы могут быть получены численно с любой точностью, используя дискретизацию интервалов интегрирования. Более того, для функции  $h(x,y)$ , имеющей один глобальный максимум, вычисление  $\inf h(x,y)$  или  $\sup h(x,y)$  не представляет трудностей.

Действительно, если  $h$  имеет один глобальный максимум, то для вычисления  $\inf h(x,y)$  или  $\sup h(x,y)$  в области значений  $[B_\kappa \times A_\gamma]$  требуется только одно вычисление:

1) когда  $b_\kappa^* \leq y_0$  и  $a_\gamma^* \leq x_0$ , наибольшее и наименьшее значения находятся соответственно в вершинах  $(b_\kappa^*, a_\gamma^*)$  и  $(b_{*\kappa}, a_{*\gamma})$  прямоугольника  $[B_\kappa \times A_\gamma]$ ;

2) когда  $b_{*\kappa} \leq y_0 \leq b_\kappa^*$  и  $a_\gamma^* \leq x_0$ , наибольшее значение находится в точке  $(a_\gamma^*, y_0)$  и наименьшее значение – в одной из точек  $(a_{*\gamma}, b_{*\kappa})$  или  $(a_{*\gamma}, b_\kappa^*)$ ;

3) в том случае, когда точка  $(x_0, y_0)$  находится внутри прямоугольника  $[B_\kappa \times A_\gamma]$ , она является наибольшим значением, а наименьшее значение находится на одной из вершин прямоугольника  $[B_\kappa \times A_\gamma]$ .

Все остальные ситуации следуют из приведенных выше.

С вычислительной точки зрения условие независимости случайных множеств эквивалентно условию независимости в схеме Монте-Карло, где каждое испытание представляет из себя набор из двух случайно выбранных интервалов  $A_\gamma$  и  $B_\kappa$ . Следуя этой связи, можно рассмотреть следующее выражение:

$$\bar{\mathbb{E}}h = \int_0^1 \int_0^1 \sup_{(x,y) \in [B_\kappa \times A_\gamma]} h(x,y) I(\kappa = \gamma) d\kappa d\gamma,$$

где индикаторная функция  $I(\kappa = \gamma)$  равна 1, если  $\kappa = \gamma$ , и 0 во всех остальных случаях. Очевидно, что это выражение соответствует условию полной корреляции между р-блоками.

### 9.9.3. Отсутствие информации о независимости

Так как р-блоки являются частным случаем случайных множеств, можно использовать результаты, представленные

в работе [33], где показано, что рассмотрение условия отсутствия информации о независимости, когда маргинальные р-блоки являются случайными множествами, эквивалентно рассмотрению множества всех возможных совместных случайных множеств, имеющих в качестве маргинальных соответствующие р-блоки. Используя результаты работы [78], можно вычислить границы математического ожидания функции  $h$  следующим образом:

$$\underline{\mathbb{E}}h = \inf_{f_{XY}^M \in \mathcal{J}_{XY}} \iiint \inf_{\substack{x \in [x_1, x_2] \\ y \in [y_1, y_2]}} h(x, y) Df_{XY}^M,$$

$$\overline{\mathbb{E}}h = \sup_{f_{XY}^M \in \mathcal{J}_{XY}} \iiint \sup_{\substack{x \in [x_1, x_2] \\ y \in [y_1, y_2]}} h(x, y) Df_{XY}^M,$$

где

$$Df_{XY}^M = f_{XY}^M(x_1, x_2, y_1, y_2) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2,$$

$\mathcal{J}_{XY}$  – множество всех возможных базовых плотностей доверия  $f_{XY}^M$ , определенных на  $\mathbb{R}^4$ , которые имеют маргинальные плотности  $f_X^M$  и  $f_Y^M$ .

Хотя представленные выражения можно считать одним из путей формулирования задачи, ее решение аналитически в большинстве случаев невозможно. С другой стороны, решение может быть получено приближенно, представляя маргинальные р-блоки в виде конечных случайных множеств. Например, рассмотрим два случайных множества  $\Gamma_\gamma, \Gamma_\kappa$ , являющихся приближением р-блоков  $[\underline{F}, \overline{F}]_X, [\underline{F}, \overline{F}]_Y$  и состоящих из множеств  $A_{\gamma_i}, B_{\kappa_j}$ , где  $i, j = 1, \dots, n$ , и все случайные множества имеют одинаковые веса, т.е. для любых  $i$  и  $j$  выполняется условие  $\gamma_i - \gamma_{i-1} = \kappa_j - \kappa_{j-1} = 1/n$ . В итоге получаем задачу оптимизации:

$$\underline{\mathbb{E}}^*h = \inf_{\Gamma_{\gamma, \kappa} \in \Gamma_{\gamma, \kappa}^*} \sum \inf_{\substack{x \in A_{\gamma_i} \\ y \in B_{\kappa_j}}} h(x, y) m_{\Gamma_{\gamma, \kappa}}(A_{\gamma_i} \times B_{\kappa_j})$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n m_{\Gamma_{\gamma, \kappa}}(A_{\gamma_i} \times B_{\kappa_j}) = m_{\Gamma_\gamma}(A_{\gamma_i}),$$

$$\sum_{i=1}^n m_{\Gamma_{\gamma, \kappa}}(A_{\gamma_i} \times B_{\kappa_j}) = m_{\Gamma_{\kappa}}(B_{\kappa_j}),$$

где  $\Gamma_{\gamma, \kappa}^*$  – множество совместных случайных множеств, маргинальные случайные множества которых –  $\Gamma_{\gamma}, \Gamma_{\kappa}$  соответственно;  $m_{\Gamma_{\gamma, \kappa}}(A_{\gamma_i} \times B_{\kappa_j})$  – базовая вероятность фокального элемента  $A_{\gamma_i} \times B_{\kappa_j}$ .

Приближенное вычисление верхней границы математического ожидания  $\bar{\mathbb{E}}^* h$  осуществляется аналогично.

## 9.10. Функция с произвольным числом точек минимума и максимума

Рассмотрим случай, когда функция  $h$  имеет чередующиеся локальные максимумы в точках  $a_i$  и минимумы в точках  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . При этом

$$b_0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots \quad (9.20)$$

**Утверждение 9.4.** Если локальные максимумы ( $a_i$ ) и минимумы ( $b_i$ ) функции  $h$  удовлетворяют условию (9.20), то оптимальное распределение  $F$  для вычисления нижней границы математического ожидания  $\underline{\mathbb{E}}h$  имеет скачки в точках  $b_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots$  размера

$$\min(\bar{F}(b_i), \alpha_{i+1}) - \max(\underline{F}(b_i), \alpha_i).$$

Между скачками с номерами  $i-1$  и  $i$  оптимальная функция распределения  $F$  имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} \bar{F}(x), & x < a' \\ \alpha_i, & a' \leq x \leq a'' \\ \underline{F}(x), & a'' < x \end{cases},$$

где  $\alpha$  – корень уравнения

$$h\left(\max\left(\bar{F}^{-1}(\alpha_i), b_{i-1}\right)\right) = h\left(\min\left(\underline{F}^{-1}(\alpha_i), b_i\right)\right)$$

в интервале  $[\underline{F}(a_i), \bar{F}(a_i)]$ ,

$$a' = \max\left(\bar{F}^{-1}(\alpha_i), b_{i-1}\right), \quad a'' = \min\left(\underline{F}^{-1}(\alpha_i), b_i\right).$$

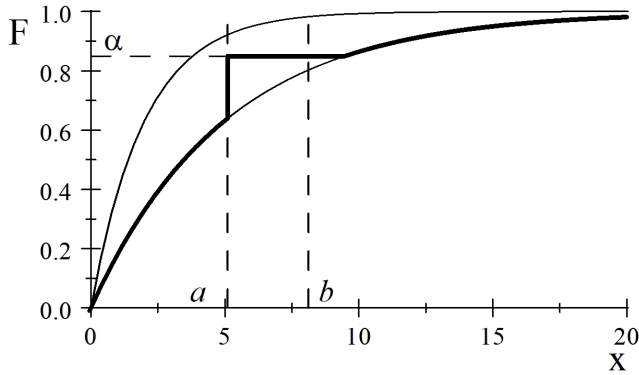


Рис. 9.8. Оптимальное распределение (жирная линия) для вычисления верхней границы математического ожидания (вариант 1)

*Верхняя граница  $\bar{\mathbb{E}}h$  вычисляется из условия согласованности границ  $\bar{\mathbb{E}}h = -\underline{\mathbb{E}}(-h)$ .*

Оптимальная функция распределения  $F$  в общем случае аналогична графику, изображенному на рис. 9.3, и представляет из себя последовательность вертикальных и “горизонтальных” скачков, которые могут ограничиваться функциями  $\bar{F}$  или  $\underline{F}$ . Например, для функции  $h$ , имеющей один минимум в точке  $b$  и один максимум в точке  $a$ , варианты оптимальных функций распределения вероятностей для расчета верхней границы математического ожидания имеют вид, показанный на рис. 9.8 и рис. 9.9.

## 9.11. Рандомизированное действие

Рассмотрим задачу принятия решений при немонотонной непрерывной функции полезности, когда цель – поиск рандомизированного действия, т.е. распределения вероятностей  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  на  $(\mathcal{A}, \mathcal{P}o(\mathcal{A}))$ . Используя обозначения, введенные в главе 8, предполагаем, что информация о случайной переменной  $X$ , характеризующей состояния природы, представлена снова в виде нижнего  $\underline{F}$  и верхнего  $\bar{F}$  распределения

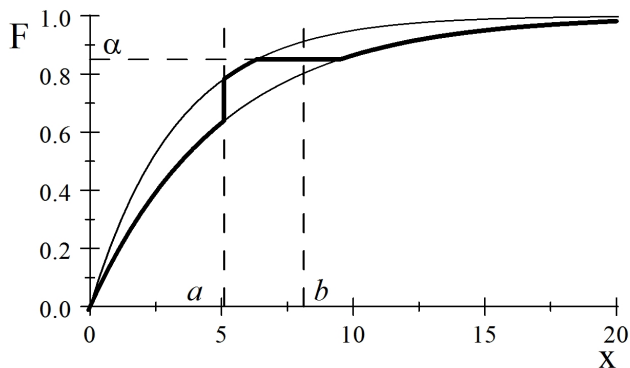


Рис. 9.9. Оптимальное распределение (жирная линия) для вычисления верхней границы математического ожидания (вариант 2)

вероятностей, которые ограничивают все распределения множеством  $\mathcal{M}$ . Нижняя и верхняя границы ожидаемой полезности на множестве распределений  $\mathcal{M}$  определяется как

$$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{h}(\lambda) = \inf_{\underline{F} \leq F \leq \overline{F}} \int_{\mathbb{R}} h(\lambda, x) dF(x), \quad (9.21)$$

$$\overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{h}(\lambda) = \sup_{\underline{F} \leq F \leq \overline{F}} \int_{\mathbb{R}} h(\lambda, x) dF(x), \quad (9.22)$$

что аналогично определению границ ожидаемой полезности для чистой стратегии.

Рассмотрим принятие решений с использованием пессимистического критерия (8.2). Необходимо отметить, что аналитическое решение задачи наталкивается на значительные трудности, так как даже при монотонных функциях  $h_k(x)$  функция  $h(\lambda, x)$  может иметь максимумы и минимумы при определенных значениях  $\lambda$ . Поэтому предлагаются приближенные методы решения задачи.

Зафиксируем вектор  $\lambda$  и запишем прямую задачу линейного программирования для вычисления  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{h}(\lambda)$ :

$$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{h}(\lambda) = \min_{\pi \in \mathcal{M}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda, x) \pi(x) dx \rightarrow \max_{\lambda}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \pi(x) &\geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \pi(x) dx = 1, \\ - \int_{-\infty}^x \pi(x) dx &\geq -\bar{F}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \int_{-\infty}^x \pi(x) dx &\geq \underline{F}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Приближенное решение задачи может быть найдено, используя  $N$  точек  $F(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , функции распределения  $F$  и дискретизируя все функции ( $\underline{F}(x)$ ,  $\bar{F}(x)$ ,  $h_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ). Тогда задача линейного программирования для вычисления нижней границы ожидаемой полезности имеет вид:

$$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}^* \mathbf{h}(\lambda) = \inf_{z_k} \sum_{k=1}^N h(\lambda, x_k) z_k$$

при ограничениях  $\lambda \cdot \mathbf{1} = 1$ ,

$$\begin{aligned} z_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad \sum_{k=1}^N z_k = 1, \\ \sum_{k=1}^i z_k &\leq \bar{F}(x_i), \quad \sum_{k=1}^i z_k \geq \underline{F}(x_i), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Здесь  $z_k$  – переменные оптимизации; целевая функция  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}^* \mathbf{h}(\lambda)$  – приближение нижней границы ожидаемой полезности. Выбирая последовательно распределения  $\lambda$  из единичного симплекса  $S(1, n)$  вероятностей, подставляя эти распределения в целевую функцию и многократно (для каждого распределения из  $S(1, n)$ ) решая задачу линейного программирования, получим множество приближений  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}^* \mathbf{h}(\lambda)$ . Оптимальное распределение  $\lambda$  может быть найдено, используя условие (8.2).

Из рассмотренного алгоритма видно, что данная задача является чрезвычайно сложной с вычислительной точки зрения даже при  $n = 2$  и, конечно, не может быть реализована на практике.

### 9.11.1. Приближенное решение в терминах двойственной задачи программирования

Запишем двойственную задачу линейного программирования для вычисления  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{h}(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{h}(\lambda) &= \\ &= \max_{c(t), d(t), c_0} \left( c_0 + \int_{-\infty}^{\infty} (-c(t)\overline{F}(t) + d(t)\underline{F}(t)) dt \right) \end{aligned}$$

при ограничениях  $c_0 \in \mathbb{R}$ ,

$$c(t) \geq 0, d(t) \geq 0,$$

$$c_0 + \int_x^{\infty} (-c(t) + d(t)) dt \leq h(\lambda, x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что наша конечная цель – вычислить оптимальное распределение  $\lambda$ , при котором достигается максимум нижней границы  $\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{h}(\lambda)$ . А это – оптимизационная задача вида

$$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{h}(\lambda) \rightarrow \max_{\lambda}$$

при ограничении  $\lambda \cdot \mathbf{1} = 1$ .

Следовательно, можно записать “совместную” задачу оптимизации для вычисления оптимального распределения  $\lambda$  и  $c_0, c(t), d(t)$ :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}}\mathbf{h}(\lambda) &= \\ &= \max \left( c_0 + \int_{-\infty}^{\infty} (-c(t)\overline{F}(t) + d(t)\underline{F}(t)) dt \right) \end{aligned} \quad (9.23)$$

при ограничениях  $c_0 \in \mathbb{R}, c(t), d(t) \geq 0, \lambda_k \geq 0, \lambda \cdot \mathbf{1} = 1$  и

$$c_0 + \int_x^{\infty} (-c(t) + d(t)) dt \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k h_k(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (9.24)$$

Как видно из полученной задачи, она является линейной по всем переменным, включая  $\lambda$ , и может быть приближенно решена посредством известных методов. Эта задача намного проще с вычислительной точки зрения. Кроме того, для поиска оптимального действия достаточно решить задачу (9.23)–(9.24) только один раз.

### 9.11.2. Приближенное решение задачи в терминах случайных множеств

В терминах случайных множеств (см. раздел 9.3) определение нижней границы ожидаемой полезности осуществляется при помощи выражения

$$\underline{\mathbb{E}}_{\mathcal{M}} \mathbf{h}(\lambda) = \int_0^1 \inf_{x \in A_\gamma} h(\lambda, x) d\gamma. \quad (9.25)$$

Здесь  $A_\gamma = [a_{*\gamma}, a_\gamma^*]$ ,  $\gamma \in [0, 1]$ ;  $a_{*\gamma}$ ,  $a_\gamma^*$  определены в разделе 9.3.

Введем новую переменную  $G(\gamma) = \inf_{x \in A_\gamma} h(\lambda, x)$ . Тогда для любого  $\gamma \in [0, 1]$  и для любого  $x \in A_\gamma$  справедливо условие  $G(\gamma) \leq h(\lambda, x)$ . Используя (9.25), можно записать следующую задачу линейного программирования:

$$\max_{G(\gamma), \lambda} \int_0^1 G(\gamma) d\gamma \quad (9.26)$$

при ограничениях

$$G(\gamma) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k h_k(x), \quad \forall x \in A_\gamma, \quad \gamma \in [0, 1], \quad (9.27)$$

$$\lambda \cdot \mathbf{1} = 1. \quad (9.28)$$

Здесь  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $G(\gamma)$ ,  $\gamma \in [0, 1]$  – переменные оптимизации. Конечно, представленная задача имеет бесконечное число переменных и ограничений. Однако, разделяя интервал  $[0, 1]$  на  $N$  частей и каждый интервал  $A_\gamma$  – на  $M$  частей, получим приближенную задачу линейного программирования с  $N + n$  переменными и  $M \cdot N + n + 1$  ограничениями (здесь  $n$  ограничений имеют вид  $\lambda_k \geq 0$  и явно не указаны) –

$$\max_{G_j, \lambda} \sum_{j=1}^N G_j$$

при ограничениях  $\lambda \cdot \mathbf{1} = 1$  и

$$G_j \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k h_k \left( \inf A_{j/N} + i \cdot (\sup A_{j/N} - \inf A_{j/N}) / M \right),$$

$$i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N.$$



Интересно отметить, что использование двух различных типов задач для приближенного поиска оптимального решения имеет большой смысл. С одной стороны, в первой задаче (двойственная задача программирования) дискретизируется множество значений, на котором определены функции распределения вероятностей, а во второй задаче (на основе случайных множеств) – интервал от 0 до 1 и интервалы  $A_\gamma$ . Другими словами, используются различные способы дискретизации. С другой стороны, обе задачи в пределе должны давать одинаковые оптимальные значения целевых функций. Следовательно, степень приближения или количество точек, на которое разделяются соответствующие интервалы, можно регулировать, проверяя, насколько обе задачи при заданном уровне приближения дают близкие результаты. Это позволяет избежать слишком сложных вычислений, целью которых является высокая точность расчетов.

## 9.12. Заключение

В заключение необходимо отметить, что рассмотрена только малая часть задач, которые имеют место при принятии решений с бесконечным множеством состояний. Это связано с тем, что в большинстве случаев аналогичные простые решения в явном виде, как это сделано в представленной главе, отсутствуют. Многие задачи в настоящее время могут быть решены только приближенно в случае немонотонной функции полезности. Однако нельзя отвергать приближенные решения. Вычислительные эксперименты показали, что приближенные решения могут быть достаточно близки к точным. С другой стороны, точное задание граничных функций распределения вероятностей является также определенной идеализацией и сглаживанием ступенчатых функций, полученных в результате точных или неточных наблюдений. А для этих функций можно всегда получить более или менее точное решение.

Необходимо также отметить, что рассмотрение общего случая функций полезности с произвольным числом минимумов и максимумов имеет в большей степени теоретический

интерес, так как анализ проблемы показал, что в большинстве ситуаций функции полезности являются монотонными или имеют один максимум или минимум. Ситуация наличия одновременно минимума и максимума уже практически не встречается. Это является причиной того, почему задачи принятия решений при описании состояний природы распределением возможностей и случайными множествами рассматривались только для случая функции полезности, имеющей один максимум, хотя обобщение этого частного случая не вызывает никаких затруднений.

Другой важный аспект рассмотренных в главе задач, на котором необходимо остановится, заключается в том, что, с одной стороны, класс функций распределения, ограниченный верхней и нижней границами, является слишком “большим” в том смысле, что, задавая достаточно жестко граничные функции распределения определенного вида, мы не накладываем никаких ограничений на функции внутри класса. Так, в примере 9.2 для описания времени до отказа задаются экспоненциальные распределения для границ класса, а сам класс является произвольным. С другой стороны, ограничение класса, например, только распределениями того же вида в большинстве случаев сводит задачу к поиску оптимальных параметров распределений вероятностей в рамках интервалов этих параметров. Если в примере 9.2 предположить, что в классе распределений могут быть только экспоненциальные распределения, то задача вычисления верхней границы ожидаемой полезности имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}h &= \sup_{0.2 \leq \lambda \leq 0.5} \int_0^{\infty} h(x) \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda x) dx = \\ &= \sup_{0.2 \leq \lambda \leq 0.5} \int_0^{\infty} (60 - (x - 5)^2) \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda x) dx = 52. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляется нижняя граница  $\underline{\mathbb{E}}h = 34$ . Как видно из расчетов, задача существенно упрощается, если по крайней мере функция распределения имеет только один параметр. В то же время вопросы принятия решений при использовании более сложных классов распределений, например классов стареющих и молодеющих распределений [122, 123, 125, 154],

Таблица 9.1. Прямая задача

$v = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \rho(x) dx \rightarrow \min$	
при ограничениях	
1	$\rho(x) \geq 0,$
2	$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1,$
3	$-\int_{-\infty}^x \rho(x) dx \geq -\overline{F}(x),$
4	$\int_{-\infty}^x \rho(x) dx \geq \underline{F}(x).$

Таблица 9.2. Двойственная задача

$w = c_0 + \int_{-\infty}^{\infty} (-c(t) \overline{F}(t) + d(t) \underline{F}(t)) dt \rightarrow \max$	
при ограничениях	
1	$c_0 + \int_x^{\infty} (-c(t) + d(t)) dt \leq h(x),$
2	$c_0 \in \mathbb{R},$
3	$c(x) \geq 0,$
4	$d(x) \geq 0.$

остаются открытыми и требуют дополнительных исследований.

### 9.13. Приложение к главе 9

#### Доказательства утверждения 9.1<sup>5</sup>.

**Доказательство, использующее линейное программирование.** Предполагается, что функция  $h(x)$  является дифференцируемой на множестве  $R$  и имеет конечное значение при  $x \rightarrow \infty$ . Граничные функции распределений  $\underline{F}$  и  $\overline{F}$  также дифференцируемы. Для вычисления нижней границы ожидаемой полезности можно записать прямую и двойственную задачи линейного программирования (табл. 9.1 и 9.2). При этом ограничения с одинаковыми номерами соответствуют друг другу с точки зрения двойственности.

Схема доказательства следующая: 1) предлагается допустимое решение для прямой задачи; 2) предлагается соответствующее допустимое решение для двойственной задачи; 3) показывается, что целевые функции совпадают и, согласно теореме о двойственных задачах в линейном программировании, предлагаемые решения являются оптимальными.

Сначала рассмотрим прямую задачу. Пусть  $a', a'' \in R$ . Функция

<sup>5</sup>Часть доказательства этого утверждения сделана С.В. Гуровым.

плотности

$$\rho(x) = \begin{cases} d\overline{F}(x)/dx, & x < a' \\ 0, & a' \leq x \leq a'' \\ d\underline{F}(x)/dx, & a'' < x \end{cases}$$

является допустимым решением прямой задачи, если выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1,$$

которое можно переписать как

$$\int_{-\infty}^{a'} d\overline{F}(x) + \int_{a''}^{\infty} d\underline{F}(x) = 1$$

или как

$$\overline{F}(a') = \underline{F}(a''). \quad (9.29)$$

Теперь рассмотрим двойственную задачу и прежде всего ее первое ограничение

$$c_0 + \int_x^{\infty} (-c(t) + d(t)) dt \leq h(x). \quad (9.30)$$

Оно соответствует ограничению в прямой задаче  $\rho(x) \geq 0$ .

Рассмотрим следующее допустимое решение двойственной задачи:  $c_0 = h(\infty)$ ,

$$c(x) = \begin{cases} h'(x), & x < a' \\ 0, & x \geq a' \end{cases}, \quad d(x) = \begin{cases} 0, & x < a'' \\ -h'(x), & x \geq a'' \end{cases}.$$

Неравенства  $c(x) \geq 0$  и  $d(x) \geq 0$  выполняются, если выполняется условие  $a' \leq a \leq a''$ , т.е. интервал  $[a', a'']$  покрывает точку максимума функции  $h$ . Интегрируя  $c(x)$  и  $d(x)$ , получаем возрастающую функцию:

$$C(x) = - \int_x^{\infty} c(t) dt = \begin{cases} h(x) - h(a'), & x < a' \\ 0, & x \geq a' \end{cases}$$

и убывающую функцию

$$D(x) = \int_x^{\infty} d(t) dt = \begin{cases} h(a'') - h(\infty), & x < a'' \\ h(x) - h(\infty), & x \geq a'' \end{cases}.$$

Перепишем условие (9.30) в следующем виде:

$$c_0 + C(x) + D(x) \leq h(x). \quad (9.31)$$

Если  $x < a'$ , то равенство (9.31) сводится к

$$c_0 + h(x) - h(a') + h(a'') - h(\infty) = h(x).$$

Отсюда

$$h(a'') = h(a'). \quad (9.32)$$

Если  $a' < x < a''$ , то  $c_0 + h(a'') - h(\infty) \leq h(x)$ . Это означает, что для всех  $x \in (a', a'')$  выполняется условие  $h(a'') = h(a') \leq h(x)$ , т.е.  $h(a'')$  и  $h(a')$  – минимальные значения функции  $h(x)$  на интервале  $x \in (a', a'')$ .

Если выполняется условие  $x \geq a''$ , то получаем тривиальное равенство  $c_0 + h(x) - h(\infty) = h(x)$ .

Два предлагаемых решения верны, если и только если выполняются (9.29) для прямой задачи и (9.32) для двойственной. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим функцию

$$\varphi(\alpha) = h(\overline{F}^{-1}(\alpha)) - h(\underline{F}^{-1}(\alpha)),$$

которая является непрерывной как разность двух непрерывных функций. Так как функция  $h$  имеет максимум в точке  $x = a$ , то, принимая  $\alpha = \underline{F}(a)$ , получим неравенство

$$\varphi(\gamma) = h(\overline{F}^{-1}(\underline{F}(a))) - h(a) \leq 0$$

и, принимая  $\gamma = \overline{F}(a)$ , получим неравенство

$$\varphi(\gamma) = h(a) - h(\underline{F}^{-1}(\overline{F}(a))) \geq 0.$$

Следовательно, существует такое значение  $\gamma$  в интервале  $(\underline{F}(a), \overline{F}(a))$ , что  $\varphi(\gamma) = 0$  (благодаря непрерывности  $\varphi$ ).

Поэтому существуют такие  $a' = \overline{F}^{-1}(\gamma)$  и  $a'' = \underline{F}^{-1}(\gamma)$ , что выполняется равенство  $h(a') = h(a'')$  в (9.32).

Для прямой задачи целевая функция имеет вид

$$v_{\min} = \int_0^{a'} h(x) d\overline{F}(x) + \int_{a''}^{\infty} h(x) d\underline{F}(x).$$

После несложных преобразований получим целевую функцию для двойственной задачи

$$\begin{aligned} w_{\max} &= c_0 + \int_0^{a'} -h'(t) \overline{F}(t) dt + \int_{a''}^{\infty} -h'(t) \underline{F}(t) dt = \\ &= c_0 - h(a') \overline{F}(a') + \int_0^{a'} h(t) d\overline{F}(t) + \\ &+ h(a'') \underline{F}(a'') - h(\infty) + \int_{a''}^{\infty} h(t) d\underline{F}(t) \end{aligned}$$

или

$$w_{\max} = -h(a') \overline{F}(a') + \int_0^{a'} h(t) d\overline{F}(t) + \\ + h(a'') \underline{F}(a'') + \int_{a''}^{\infty} h(t) d\underline{F}(t).$$

Из условия (9.32) следует, что  $w_{\max} = v_{\min}$ , что и требовалось доказать. Верхняя граница математического ожидания доказывается аналогично. ■

**Доказательство, использующее случайные множества.** Рассмотрим равенства (9.4)–(9.3). Можно заметить из (9.4), что при  $\gamma < \underline{F}(a)$  наибольшим значением функции  $h$  на  $A_\gamma$  является  $h(a_\gamma^*)$ , благодаря тому что функция  $h$  возрастает в интервале  $[a_{\inf}, a]$ . При  $\gamma \in [\underline{F}(a), \overline{F}(a)]$  наибольшим значением функции  $h$  на  $A_\gamma$  является  $f(a)$ . Случай  $\gamma > \overline{F}(a)$  анализируется аналогично, учитывая убывание функции  $h$  на этом интервале. Окончательно получаем для верхней границы математического ожидания

$$\overline{\mathbb{E}}h = \int_0^{\underline{F}(a)} h(a_\gamma^*) d\gamma + \int_{\underline{F}(a)}^{\overline{F}(a)} h(a) d\gamma + \int_{\overline{F}(a)}^1 h(a_{*\gamma}) d\gamma.$$

Рассмотрим теперь нижнюю границу математического ожидания. При  $\gamma < \underline{F}(a)$  и  $\gamma > \overline{F}(a)$  поиск наименьшего значения функции  $h$  осуществляется аналогично и приводит к значениям  $h(a_{*\gamma})$  и  $h(a_\gamma^*)$  соответственно. При  $\gamma \in [\underline{F}(a), \overline{F}(a)]$  наименьшим значением функции  $h$  на  $A_\gamma$  является либо  $h(a_{*\gamma})$ , либо  $h(a_\gamma^*)$ , так как  $h$  возрастает при  $x < a$  и убывает при  $x > a$ . Отсюда

$$\underline{\mathbb{E}}h = \int_0^{\underline{F}(a)} h(a_{*\gamma}) d\gamma + \int_{\underline{F}(a)}^{\overline{F}(a)} \min(h(a_{*\gamma}), h(a_\gamma^*)) d\gamma + \\ + \int_{\overline{F}(a)}^1 h(a_\gamma^*) d\gamma, \quad (9.33)$$

Используя (9.29) и (9.32) (вывод используемый в первом доказательстве является достаточно общим и может применяться здесь), получаем, что существует такой уровень  $\alpha$ , что выполняется равенство  $h(\overline{F}^{-1}(\alpha)) = h(\underline{F}^{-1}(\alpha))$ . ■

Таблица 9.3. Прямая задача

$v = \int_{b_0}^{b_1} h(x) f(x) dx \rightarrow \min$	
при ограничениях	
1	$f(x) \geq 0,$
2	$F_0 \geq 0,$
3	$F_1 \geq 0,$
4	$-\int_{b_0}^x f(t) dt - F_0 \geq -\bar{F}(x),$
5	$\int_{b_0}^x f(t) dt + F_0 \geq \underline{F}(x),$
6	$-F_0 \geq -\bar{F}(b_0),$
7	$F_0 \geq \underline{F}(b_0),$
8	$-F_1 \geq -\bar{F}(b_1),$
9	$F_1 \geq \underline{F}(b_1),$
10	$\int_{b_0}^{b_1} f(t) dt + F_0 - F_1 = 0.$

**Доказательства утверждения 9.4.**

**Доказательство, использующее линейное программирование.** Рассмотрим прямую и двойственную задачи оптимизации (см. табл. 9.3 и 9.4) для вычисления нижней границы математического ожидания функции  $h$  для конечного интервала  $[b_0, b_1]$ . Здесь  $h$  имеет один максимум в точке  $a_1$ . Соответствующие задачи будут называться локальными.

Все неравенства в задачах выполняются только для  $x \in [b_0, b_1]$ . Особенность этих задач заключается в том, что в них используются “граничные” условия в виде переменных  $F_0$  и  $F_1$  в прямой задаче и соответствующих дополнительных ограничений в двойственной. Эти переменные являются значениями неизвестной оптимальной функции распределения в точках  $b_0$  и  $b_1$  соответственно. Предположим, что  $h(x) \geq 0$  для всех  $x$  и, следовательно, для  $x \in [b_0, b_1]$ . Существуют различные оптимальные решения задач в зависимости от вида функции  $h$  и функций  $\underline{F}$  и  $\bar{F}$ . Поэтому рассмотрим следующие возможные случаи.

Случай 1.  $\bar{F}(b_0) > \underline{F}(b_1)$ . Очевидно, что оптимальное решение имеет вид:  $f(x) = 0, F(x) = F_0 = F_1 = \alpha$ , где  $\alpha$  - произвольное число, удовлетворяющее условию  $\underline{F}(b_1) < \alpha < \bar{F}(b_0)$  для прямой задачи и условиям  $c(x) = d(x) = 0, c_0 = d_0 = c_1 = d_1 = e = 0$  для двойственной задачи.

Случай 2.  $\bar{F}(b_0) \leq \underline{F}(b_1)$ . В этом случае можно найти значение  $\alpha$ , являющееся корнем уравнения

$$\varphi(\alpha) = h\left(\max\left(\bar{F}^{-1}(\alpha), b_0\right)\right) - h\left(\min\left(\underline{F}^{-1}(\alpha), b_1\right)\right)$$

Таблица 9.4. Двойственная задача

$w = -c_0 \overline{F}(b_0) + d_0 \underline{F}(b_0) - c_1 \overline{F}(b_1) + d_1 \underline{F}(b_1) +$	
$+ \int_{b_0}^{b_1} (-\overline{F}(x) c(x) + \underline{F}(x) d(x)) dx \rightarrow \max$	
при ограничениях	
1	$e + \int_x^{b_1} (-c(t) + d(t)) dt \leq h(x),$
2	$e - c_0 + d_0 + \int_{b_0}^{b_1} (-c(t) + d(t)) dt \leq 0,$
3	$-e - c_1 + d_1 \leq 0,$
4	$c(x) \geq 0,$
5	$d(x) \geq 0,$
6	$c_0 \geq 0,$
7	$d_0 \geq 0,$
8	$c_1 \geq 0,$
9	$d_1 \geq 0,$
10	$e \in \mathbb{R}.$

в интервале  $[\underline{F}(a_1), \overline{F}(a_1)]$ . Так как  $h$  имеет максимум в точке  $a_1$ , то корень  $\alpha$  существует в интервале  $[\underline{F}(a_1), \overline{F}(a_1)]$ .

Рассмотрим три варианта для случая 2.

Вариант 2.1.  $\overline{F}(b_0) \leq \alpha \leq \underline{F}(b_1)$ . Для сокращения записи обозначим  $a' = \overline{F}^{-1}(\alpha)$ ,  $a'' = \underline{F}^{-1}(\alpha)$ . Тогда оптимальное решение имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} d\overline{F}(x)/dx, & b_0 < x < a' \\ 0, & a' \leq x \leq a'' \\ d\underline{F}(x)/dx, & a'' < x < b_1 \end{cases},$$

$$F_0 = \overline{F}(b_0), F_1 = \underline{F}(b_1).$$

Отсюда следует

$$F(x) = \int_{b_0}^x f(t) dt + F_0 = \begin{cases} \overline{F}(x), & b_0 < x < a' \\ \alpha, & a' \leq x \leq a'' \\ \underline{F}(x), & a'' < x < b_1 \end{cases}.$$

Найдем оптимальное решение для двойственной задачи. В соответствии с теоремой равновесия [150], если  $a' < x < b_1$ , то  $c(x) = 0$ , и если  $b_0 < x < a''$ , то  $d(x) = 0$ . Очевидно, что  $d_0 = c_1 = 0$ . Рассмотрим ограничение

$$e + \int_x^{b_1} (-c(t) + d(t)) dt \leq h(x)$$

для различных интервалов  $x$ .



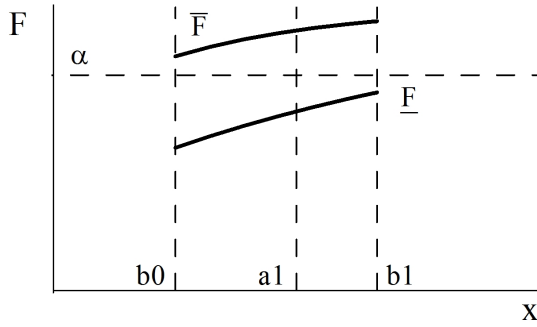


Рис. 9.10. Случай 1

Пусть  $a'' < x < b_1$ . Тогда

$$e + \int_x^{b_1} d(t) dt = h(x).$$

Отсюда  $d(x) = -h'(x)$  и  $e = h(b_1)$ .

Пусть  $a' \leq x \leq a''$ . Тогда выполняется неравенство

$$e + \int_{a''}^{b_1} d(t) dt \leq h(x)$$

или  $h(a'') \leq h(x)$ . Действительно, неравенство выполняется благодаря условию  $h(a') = h(a'')$ .

Пусть  $b_0 < x < a'$ . Тогда

$$e - \int_x^{a'} c(t) dt + \int_{a''}^{b_1} d(t) dt = h(x)$$

или

$$- \int_x^{a'} c(t) dt + h(a'') = h(x).$$

Отсюда  $c(x) = h'(x)$ . Равенство

$$e - c_0 + d_0 + \int_{b_0}^{b_1} (-c(t) + d(t)) dt = 0$$

показывает, что

$$h(b_1) - c_0 - h(a') + h(b_0) - h(b_1) + h(a'') = 0$$

и  $c_0 = h(b_0)$ . Из равенства  $-e - c_1 + d_1 = 0$  следует, что справедливо условие  $d_1 = e = h(b_1)$ . В итоге получаем:

$$c(x) = \begin{cases} h'(x), & b_0 < x < a' \\ 0, & a' \leq x \leq b_1 \end{cases},$$

$$d(x) = \begin{cases} 0, & b_0 < x < a'' \\ -h'(x), & a'' \leq x \leq b_1 \end{cases},$$

$$c_0 = h(b_0), \quad d_0 = c_1 = 0, \quad d_1 = e = h(b_1).$$

Сравним целевые функции, используя полученные оптимальные решения прямой и двойственной задач:

$$v_{\min} = \int_{b_0}^{a'} h(x) d\bar{F}(x) + \int_{a''}^{b_1} h(x) d\underline{F}(x),$$

$$w_{\max} = -\bar{F}(b_0) h(b_0) + \underline{F}(b_1) h(b_1) - \\ - \int_{b_0}^{a'} \bar{F}(x) h'(x) dx - \int_{a''}^{b_1} \underline{F}(x) h'(x) dx$$

или

$$w_{\max} = -\bar{F}(b_0) h(b_0) + \underline{F}(b_1) h(b_1) + \\ + \int_{b_0}^{a'} h(x) d\bar{F}(x) - \bar{F}(a') h(a') + \bar{F}(b_0) h(b_0) + \\ + \int_{a''}^{b_1} h(x) d\underline{F}(x) - \underline{F}(b_1) h(b_1) + \underline{F}(a'') h(a'') = \\ = v_{\min}.$$

Из полученных выражений видно, что целевые функции совпадают.

Вариант 2.2.  $\alpha > \underline{F}(b_1)$ . Обозначим  $a' = \bar{F}^{-1}(\underline{F}(b_1))$ . Тогда оптимальное решение прямой задачи оптимизации имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} d\bar{F}(x)/dx, & b_0 < x < a' \\ 0, & a' \leq x \leq b_1 \end{cases},$$

$$F_0 = \bar{F}(b_0), \quad F_1 = \underline{F}(b_1),$$

$$F(x) = \int_{b_0}^x f(t) dt + F_0 = \begin{cases} \bar{F}(x), & b_0 < x < a' \\ \underline{F}(b_1), & a' \leq x \leq b_1 \end{cases}.$$

Найдем оптимальное решение двойственной задачи. В соответствии с теоремой равновесия [150], если  $a' < x < b_1$ , то  $c(x) = 0$ , и

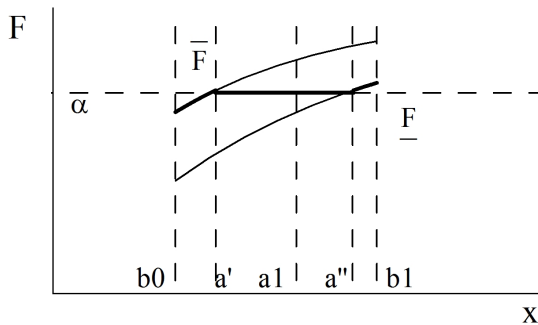


Рис. 9.11. Случай 2.1

если  $b_0 < x < b_1$ , то  $d(x) = 0$ . Очевидно, что  $d_0 = c_1 = 0$ . Рассмотрим ограничение

$$e + \int_x^{b_1} (-c(t) + d(t)) dt \leq h(x)$$

для различных интервалов.

Пусть  $a' < x < b_1$ . Тогда условие  $e \leq h(x)$  должно выполняться.

Пусть  $b_0 < x < a'$ . Тогда верно равенство

$$e - \int_x^{a'} c(t) dt = h(x).$$

Следовательно, верны равенства  $c(x) = h'(x)$  и  $e = h(a')$ . Отсюда для интервала  $a' < x < b_1$  выполняется  $e = h(a') \leq h(x)$ . Условие

$$e - c_0 + d_0 + \int_{b_0}^{b_1} (-c(t) + d(t)) dt = 0$$

показывает, что  $h(a') - c_0 - h(a') + h(b_0) = 0$  и  $c_0 = h(b_0)$ . Из равенства  $-e - c_1 + d_1 = 0$  следует, что верно условие  $d_1 = e = h(a')$ . В итоге получаем

$$c(x) = \begin{cases} h'(x), & b_0 < x < a' \\ 0, & a' \leq x \leq b_1 \end{cases},$$

$$d(x) = 0, c_0 = h(b_0), d_0 = c_1 = 0, d_1 = e = h(a').$$

Сравним целевые функции, используя полученные оптимальные решения прямой и двойственной задач:

$$v_{\min} = \int_{b_0}^{a'} h(x) d\bar{F}(x),$$

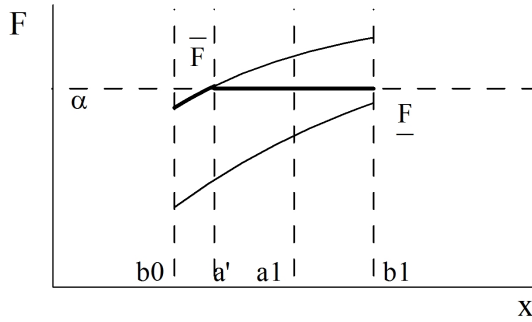


Рис. 9.12. Случай 2.2

$$\begin{aligned}
 w_{\max} &= -\bar{F}(b_0) h(b_0) + \underline{F}(b_1) h(a') - \int_{b_0}^{a'} \bar{F}(x) h'(x) dx = \\
 &= -\bar{F}(b_0) h(b_0) + \underline{F}(b_1) h(a') + \\
 &+ \int_{b_0}^{a'} h(x) d\bar{F}(x) - \bar{F}(a') h(a') + \bar{F}(b_0) h(b_0) = v_{\min}.
 \end{aligned}$$

Из полученных выражений видно, что целевые функции совпадают.

Вариант 2.3.  $\alpha < \bar{F}(b_0)$ . Обозначим  $a'' = \underline{F}^{-1}(\bar{F}(b_0))$ . Тогда оптимальное решение прямой задачи имеет вид:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \begin{cases} 0, & b_0 \leq x \leq a'' \\ d\underline{F}(x)/dx, & a'' < x < b_1 \end{cases}, \\
 F_0 &= \bar{F}(b_0), \quad F_1 = \underline{F}(b_1), \\
 F(x) &= \begin{cases} \bar{F}(b_0), & b_0 \leq x \leq a'' \\ \underline{F}(x), & a'' < x < b_1 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Доказательство этого варианта аналогично доказательству предыдущих вариантов. ■

**Доказательство, использующее случайные множества.**

Предположим, что функция  $h$  начинается с локального минимума и заканчивается локальным максимумом  $a_n$ . Случай, когда  $h$  начинается (заканчивается) локальным максимумом (минимумом) доказывается аналогично. Нижняя и верхняя границы математического ожидания вычисляются следующим образом:

$$\underline{\mathbb{E}}h = \int_0^{\underline{F}(b_n)} \min_{b_i \in A_\gamma} (h(a_{*\gamma}), h(b_i), h(a_\gamma^*)) d\gamma + \int_{\underline{F}(b_n)}^1 h(a_{*\gamma}) d\gamma,$$

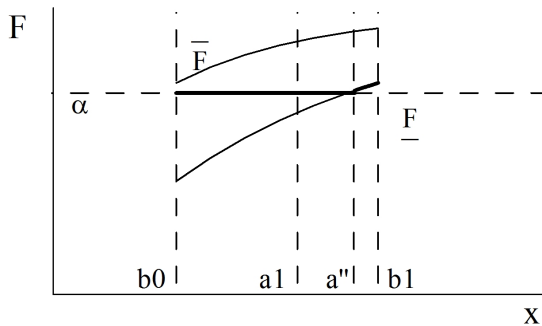


Рис. 9.13. Случай 2.3

$$\bar{\mathbb{E}}h = \int_0^{F(a_1)} h(a_\gamma^*) d\gamma + \int_{F(a_1)}^{\bar{F}(a_n)} \max_{a_i \in A_\gamma} (h(a_{*\gamma}), h(a_i), h(a_\gamma^*)) d\gamma.$$

Объясним выражение для нижней границы (верхняя граница определяется аналогично). Наиболее интересная часть – первый интеграл. Пусть  $B = \{b_i, \dots, b_j\}$ ,  $(i \leq j)$  – множество точек локальных минимумов внутри  $A_\gamma$  ( $B$  может быть пустым);  $b_{i-1}$  и  $b_{j+1}$  – ближайщие к  $A_\gamma$  точки минимумов вне самого  $A_\gamma$ . Рассмотрим ситуацию, для которой наименьший локальный минимум  $h(b_k)$ ,  $b_k \in B$  (пустое множество  $B$  является вырожденным случаем) больше, чем  $h(b_{i-1})$ ,  $h(b_{j+1})$ . Так как при возрастании  $\gamma$  расширяется интервал  $A_\gamma$ , необходимо рассмотреть различные случаи. Наименьшее значение либо смещается от  $h(a_{*\gamma})$  к  $h(b_k)$  в некоторой точке (это случай 2.2, рис. 9.12), либо смещается от  $h(b_k)$  к  $h(a_\gamma^*)$  (это случай 2.3, рис. 9.13), либо оно смещается от  $h(a_{*\gamma})$  к  $h(a_\gamma^*)$ , если  $h(b_k)$  является слишком большим (это случай 2.1, рис. 9.11). Случай 9.10 соответствует ситуации, когда локальный минимум  $b_i$  всегда больше двух других локальных минимумов (эквивалентно  $b_0, b_1$ ) в любом интервале  $A_\gamma$ . Скачок в утверждении 9.4 соответствует ситуации, когда наименьшим значением функции  $h(x)$  является значение  $h(b_k)$ , либо  $h(b_k) = h(a_\gamma^*)$ , либо  $b_k$  на границе  $A_\gamma$  при увеличении  $\gamma$ . Первый случай соответствует “горизонтальному” скачку и одному из корней  $\alpha$  в утверждении 9.4. Второй случай соответствует обрыву вертикального скачка верхней функцией распределения. ■

## Глава 10

### Анализ риска инвестиций

Прогнозировать средние экономические показатели – все равно что уверять не умеющего плавать человека, что он спокойно перейдет реку вброд, потому что ее средняя глубина не больше четырех футов.

*Милтон Фридмен*

#### 10.1. Понятие чистой современной ценности инвестиций

Основной целью анализа риска и принятия решений в инвестировании является минимизация риска того, что цели инвестиций не будут достигнуты. При этом риск возникает вследствие неопределенности того, что произойдет в будущем. Инвестиционный проект предполагает планирование во времени трех основных денежных потоков: потока инвестиций, потока текущих (операционных) платежей и потока поступлений. Как отмечено в работах [153, 168, 172], ни поток текущих платежей, ни поток поступлений не могут быть спланированы вполне точно, так как не может быть полной определенности относительно будущего состояния рынка. Цена и объемы реализуемой продукции, цены на сырье и материалы и прочие денежно-стоимостные параметры среды по факту их осуществления в будущем могут сильно различаться с предполагаемыми плановыми значениями, которые оцениваются с позиций сегодняшнего дня.

В литературе по инвестиционному анализу (например, в [2]) одним из показателей эффективности инвестиционного проекта является *чистая современная ценность инвестиций* (NPV<sup>1</sup>). В простейшей форме соотношение для NPV имеет следующий вид:

$$\text{NPV} = V_0 + \sum_{k=1}^T \frac{V_k}{(1+r)^k}, \quad (10.1)$$

где  $V_0$  – стартовый объем инвестиций<sup>2</sup>;  $T$  – число плановых интервалов (периодов) инвестиционного процесса, соответствующих сроку жизни проекта;  $V_k$  – оборотное сальдо поступлений и платежей в  $k$ -м периоде;  $r$  – ставка дисконтирования, выбранная с учетом оценок ожидаемой стоимости используемого в проекте капитала (например, ожидаемая ставка по долгосрочным кредитам).

Инвестиционный проект является эффективным, когда NPV больше определенного проектного уровня  $G$  (в самом распространенном случае  $G = 0$ ).

Существует огромное количество методов оценки риска инвестиционного проекта на основе NPV. В частности, в работах [4, 45, 67] учитывается тот факт, что проекты по своей природе являются уникальными и обычно достаточно сложными. Большинство методов можно условно разделить на несколько типов в зависимости от модели неопределенности, заложенной при описании параметров NPV  $V_k$ ,  $k = 1, \dots, T$ ,  $r$ .

Первая часть методов основана на детерминированном представлении основных параметров проекта. Это наиболее простые с точки зрения реализации методы. Однако они не учитывают неопределенность параметров, которая всегда имеет место при планировании.

Вторая часть методов учитывает тот факт, что параметры проекта являются интервальными. Эти методы используют стандартный интервальный анализ [149] для вычисления

---

<sup>1</sup>Net Present Value (англ.)

<sup>2</sup>Стартовый объем инвестиций  $V_0$  иногда заменяется ценой инвестиций  $I$ , так что  $I = -V_0$ .

интервального значения NPV. Следует отметить, что “интервальные” методы являются обобщением первой группы методов. Однако стандартный интервальный анализ предполагает, что “истинное” значение параметра проекта принадлежит соответствующему интервалу с вероятностью 1. Это слишком строгое предположение, которое далеко не всегда выполняется.

Третья часть методов основана на формализации неполноты информации об основных параметрах при помощи точных распределений вероятностей. Такие методы являются наиболее обоснованными с математической точки зрения, так как используют аппарат классической теории вероятностей. Однако они также имеют ряд недостатков. Во-первых, каждый проект отличается своей уникальностью. Поэтому использование статистики, полученной при реализации аналогичных проектов, не представляется возможным и может привести к значительным ошибкам. Во-вторых, несмотря на то что оценки, полученные в результате опроса экспертов, могут быть важной частью статистической информации о параметрах инвестиционного проекта, в то же время такие оценки обычно неточны и ненадежны вследствие ограниченных возможностей оценивания человеком. В-третьих, выбор типовых функций распределения вероятностей для описания неопределенности параметров проекта является субъективным, так как осуществляется лицом, принимающим решение, что далеко не всегда повышает доверие к полученным результатам. В-четвертых, данные методы являются достаточно сложными с вычислительной точки зрения<sup>3</sup> и в основном используют приближенные решения. Примером приближенного решения является замена распределений вероятностей случайных параметров такими их характеристиками, как математическим ожиданием и дисперсией [4]. Очевидно, что такой подход достаточно эффективен, но начальные моменты первого и второго порядка случайных параметров являются значительно менее информативными по сравнению с распределениями вероятностей.

---

<sup>3</sup>Сложность обусловлена необходимостью вычислений интегралов свертков, что уже при  $T = 2$  вызывает определенные трудности.



Несмотря на отмеченные недостатки третьей части методов, они показывают, что не существует некоторого точного значения  $NPV$ , а условие  $NPV \geq G$  не имеет смысла, так как можно говорить только о вероятности того, что  $NPV \geq G$ . С этих позиций анализ риска инвестиций отличается от анализа риска в других прикладных областях<sup>4</sup> только особенностями выражения (10.1) для  $NPV$ .

Четвертая часть методов [89] основана на использовании теории нечетких множеств и теории возможностей [155, 156]. Согласно этим методам, все параметры  $NPV$  или часть из них представляются в виде нечетких множеств с заданными функциями принадлежности. Однако эти методы имеют ряд существенных недостатков. Во-первых, выбор функций принадлежности нечетких множеств в большинстве случаев осуществляется произвольно или исходя из соображений простоты вычислений (например, выбор треугольной формы функции). Такой произвольный выбор может привести к существенным ошибкам, особенно если проект находится на грани эффективности. Во-вторых, операции минимума и максимума, используемые при вычислениях с нечеткими множествами большинством авторов, также не являются однозначными [28] с точки зрения их применения. Существует большое количество возможных операций, выбор определенного варианта которых существенно влияет на конечный результат расчетов. Кроме того, операции минимума и максимума приводят к существенной размытости результатов, особенно при выполнении операций деления и вычитания, что делает принятие решения затруднительным. Так, при большом количестве этапов результаты становятся настолько размытыми или неинформативными, что любое принятие решений по ним является слишком рискованным. В-третьих, существует много различных методов сравнения нечеткого числа и точного значения, что необходимо при сравнении нечеткого значения  $NPV$  с точным значением  $G$ . Однако все методы дают различные результаты, что может привести к неоднозначности решения,

---

<sup>4</sup>Большой класс задач анализа риска рассматривает вероятности типа  $\Pr(X \geq Y)$ , где  $X$  – некоторая случайная величина, а  $Y$  – либо другая случайная величина, либо некоторое детерминированное значение.

особенно при значительной размытости результатов.

Несмотря на то что в практике зачастую используются точные экспертные оценки параметров NPV, такие оценки обычно неточны и ненадежны вследствие ограниченных возможностей оценивания человеком. Поэтому оценки зачастую носят интервальный характер, так как эксперту проще оценить некоторый интервал, в который, по его мнению, попадает «истинное» значение оцениваемой величины. Использование известных методов интервальной арифметики для расчета NPV в данном случае невозможно, так как об одном и том же параметре, входящем в NPV, обычно имеется множество оценок, которые необходимо комбинировать. Наиболее эффективным и математически строгим аппаратом обработки таких оценок является теория Демпстера–Шейфера, или теория случайных множеств (см. главу 2). Исходными данными для расчета эффективности являются интервальные оценки стартового объема инвестиций, оборотного сальдо поступлений и платежей в каждом периоде, ставки дисконтирования, полученные на основе интервального экспертного оценивания. Никаких дополнительных предположений о качестве экспертов не используется, так как корректность их ответов автоматически определяется при вычислении вероятностей различных интервалов.

Ниже рассматривается метод [111] вычисления чистой современной ценности инвестиций при условии интервальности оценок всех параметров.

## 10.2. Формальная постановка задачи

Предположим, что экспертные оценки каждого параметра проекта представлены в виде наборов  $c_{ki}$  интервалов<sup>5</sup> оборотного сальдо поступлений и платежей в  $k$ -м периоде времени<sup>6</sup>  $\mathbf{V}_{ki} = [V_{ki}^L, V_{ki}^U]$ ,  $i = 1, \dots, n_k$ ,  $k = 1, \dots, T$ . Даны также  $d_j$  интервалов ставки дисконтирования  $\mathbf{r}_j = [r_j^L, r_j^U]$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

---

<sup>5</sup>Интервалы могут быть также вырожденными, т.е. представлять собой точечные значения.

<sup>6</sup>Предполагается для упрощения выкладок, что значение  $V_0$  известно точно.

Здесь  $n_k$  и  $m$  – числа различных интервалов параметров  $V_k$  и  $r$  соответственно. Общее число интервалов  $k$ -го оборотного сальдо равно  $N_k = \sum_{i=1}^{n_k} c_{ki}$ . В частности если  $c_{ki} = 1$  для всех  $i = 1, \dots, n_k$ , то  $N_k = n_k$ . Общее число интервалов ставки дисконтирования равно  $M = \sum_{j=1}^m d_j$ . В частности если  $d_j = 1$  для всех  $j = 1, \dots, m$ , то  $M = m$ . Обозначим значками  $\underline{L}$  и  $\underline{U}$ , нижнюю и верхнюю границы интервалов соответственно.

**Пример 10.1.** Даны четыре интервала  $[-4, -3]$ ,  $[-4, -3]$ ,  $[-4, -3]$ ,  $[-1.95, 1]$  возможных значений оборотного сальдо поступлений  $V_1$  в первом году, один интервал  $[2.4, 7]$  значений оборотного сальдо поступлений  $V_2$  во втором году, два интервала  $[0.1, 0.2]$ ,  $[0.15, 0.25]$  ставки дисконтирования  $r$  и точное значение 0 стартового объема инвестиций  $V_0$  ( $I = 0$ ). Здесь  $T = 2$ . Формально приведенная выше информация записывается как

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{11} &= [-4, -3], \quad c_{11} = 3, \\ \mathbf{V}_{12} &= [-1.95, 1], \quad c_{12} = 1, \quad n_1 = 2, \quad N_1 = 4, \\ \mathbf{V}_{21} &= [2.4, 7], \quad c_{21} = 1, \quad n_2 = 1, \quad N_2 = 1, \\ \mathbf{r}_1 &= [0.1, 0.2], \quad d_1 = 1, \\ \mathbf{r}_2 &= [0.15, 0.25], \quad d_2 = 1, \quad m = 2, \quad M = 2. \end{aligned}$$

Если предположить, что каждый параметр NPV есть случайная величина с неизвестным распределением вероятностей, то сам NPV является также случайной величиной. Следовательно, две характеристики представляют интерес: математическое ожидание  $\mathbb{E}NPV$  чистой современной ценности инвестиций и вероятность  $\Pr(NPV > 0)$  того, что NPV является неотрицательным<sup>7</sup>. Без потери общности предполагается также, что  $V_0$  известно и является точным.

### 10.3. NPV и случайные множества

Так как параметры NPV являются случайными величинами, то они могут анализироваться при помощи аппарата

---

<sup>7</sup> В общем случае интерес представляет вероятность того, что NPV превышает произвольное значение  $G$ . Однако здесь для упрощения рассматривается только вероятность  $\Pr(NPV > 0)$ , так как ненулевое значение  $G$  может быть всегда учтено в параметре  $V_0$ .

случайных множеств. Это означает, что имеющаяся информация об оборотном сальдо поступлений и платежей  $V_k$  в  $k$ -м периоде может быть представлена при помощи базовых вероятностей<sup>8</sup>  $m(\mathbf{V}_{ki}) = c_{ki}/N_k$ ,  $i = 1, \dots, n_k$ . Аналогичные базовые вероятности записываются для ставки дисконтирования  $m(\mathbf{r}_j) = d_j/M$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Здесь базовые вероятности основаны на относительных частотах интервалов (см. главу 2). Обозначим множество фокальных элементов, относящихся к значениям  $k$ -го сальдо поступлений  $\mathcal{V}_k$ , т.е.

$$\mathcal{V}_k = \{\mathbf{V}_{ki}, i = 1, \dots, n_k\}, k = 1, \dots, T, \quad (10.2)$$

и множество фокальных элементов, относящихся к значениям ставки дисконтирования  $\mathcal{R}$ , т.е.

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{r}_j, j = 1, \dots, m\}. \quad (10.3)$$

Так как NPV – функция нескольких переменных  $r$ ,  $V_k$ ,  $k = 1, \dots, T$ , то наиболее важными моментами дальнейшего анализа являются условия независимости, тип независимости и монотонность NPV как функции рассматриваемых параметров.

Когда имеется только частичная информация, формализованная при помощи множеств распределений вероятностей, различные типы независимости могут рассматриваться [15, 33] и давать при этом различные результаты. Ниже будут использоваться только три наиболее распространенных типа независимости: *независимость случайных множеств*, *известное взаимодействие* или *отсутствие сведений о независимости* и *строгая независимость*.

Нетрудно показать, что NPV является монотонно возрастающей функцией переменных  $V_k$ ,  $k = 1, \dots, T$ . Однако из пер-

---

<sup>8</sup>Здесь предполагается, что все интервалы, описывающие значения одного параметра NPV, получены из одного источника. В целях упрощения изложения различные правила комбинирования свидетельств [74] здесь не рассматриваются. Однако они могут быть применены к исходным данным, полученным из различных независимых источников. Тем не менее любое правило в конечном счете дает множество базовых вероятностей, которые образуют один объединенный источник.

вой производной по параметру  $r$

$$\frac{dNPV}{dr} = - \sum_{k=1}^T \frac{kV_k}{(1+r)^{k+1}}$$

следует, что NPV является монотонно возрастающей функцией переменной  $r$  только в том случае, если все параметры  $V_k$  не могут быть отрицательными, т.е.  $V_k \geq 0$  для всех  $k = 1, \dots, T$ . В общем случае NPV не является монотонной функцией  $r$ , что существенно усложняет анализ. Говоря ниже, что NPV – монотонная функция, подразумеваем, что эта функция убывает с ростом  $r$ .

### 10.3.1. Упрощенный метод расчета NPV “в среднем”

Первый метод расчета NPV заключается в том, что на основе полученных базовых вероятностей вычисляются границы математических ожиданий каждого параметра в соответствии с выражениями для нижней и верхней границ математического ожидания случайной величины (см. раздел 2.4). Математические ожидания для каждого параметра имеют вид:

$$\underline{\mathbb{E}}V_k = \sum_{i=1}^{n_k} m(\mathbf{V}_{ki})V_{ki}^L, \quad \overline{\mathbb{E}}V_k = \sum_{i=1}^{n_k} m(\mathbf{V}_{ki})V_{ki}^U, \quad k = 0, \dots, T,$$

$$\underline{\mathbb{E}}r = \sum_{j=1}^m m(\mathbf{r}_j)r_j^L, \quad \overline{\mathbb{E}}r = \sum_{j=1}^m m(\mathbf{r}_j)r_j^U.$$

Предполагая строгую независимость параметров NPV, можно записать на основе стандартного интервального анализа следующие границы математического ожидания NPV:

$$\underline{\mathbb{E}}_S NPV = \overline{\mathbb{E}}V_0 + \inf_{x \in [\underline{\mathbb{E}}r, \overline{\mathbb{E}}r]} \sum_{k=1}^T \frac{\underline{\mathbb{E}}V_k}{(1+x)^k},$$

$$\overline{\mathbb{E}}_S NPV = \underline{\mathbb{E}}V_0 + \sup_{x \in [\underline{\mathbb{E}}r, \overline{\mathbb{E}}r]} \sum_{k=1}^T \frac{\overline{\mathbb{E}}V_k}{(1+x)^k}.$$

В частности, для монотонных функций NPV оптимальными значениями  $x$  для вычисления нижней и верхней границ математического ожидания NPV являются  $\overline{\mathbb{E}r}$  и  $\underline{\mathbb{E}r}$  соответственно.

Рассмотренный метод является достаточно простым. Однако он не учитывает целый ряд факторов, влияющих на характеристики эффективности проекта, например различные типы независимости. Кроме того, математическое ожидание NPV не дает полного представления о поведении данного показателя.

### 10.3.2. Независимость случайных множеств

Предположим, что имеется некоторая функция двух переменных  $x_1 \in \Omega_1$  и  $x_2 \in \Omega_2$  и известны базовые вероятности  $m_1(A_1)$  и  $m_2(A_2)$  событий  $A_1 \subseteq \Omega_1$  и  $A_2 \subseteq \Omega_2$  соответственно. Независимость случайных множеств имеет место [15, 24], если совместная базовая вероятность определяется из условия  $m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2)$ . Это определение независимости можно обосновать в терминах многозначных отображений при следующих условиях [15]:

1) существуют два случайных эксперимента на множествах исходов  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ , каждый из которых моделируется некоторым известным распределением вероятностей;

2) каждое множество исходов  $\Psi_i$  связано с  $\Omega_i$  многозначным отображением  $G_i : \Psi_i \rightarrow \mathcal{P}(\Omega_i)$ ;

3) распределение вероятностей на  $\Psi_i$  образует базовые вероятности  $m_i$  на  $\Omega_i$  посредством многозначного отображения  $G_i$ ;

4) распределения вероятностей на  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  статистически независимы;

5) нет никакой информации о взаимодействии между механизмами выбора исходов из  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ .

Обозначим множество индексов

$$\mathcal{J} = \{(i_1, \dots, i_T, j) : i_k = 1, \dots, n_k, k = 1, \dots, T, j = 1, \dots, m\}$$

и декартово произведение интервалов

$$\Phi(i_1, \dots, i_T, j) = \mathbf{V}_{1i_1} \times \dots \times \mathbf{V}_{Ti_T} \times \mathbf{r}_j \subseteq \mathbb{R}^{T+1}.$$

Тогда верхняя граница вероятности события  $A \subseteq \mathbb{R}^{T+1}$  есть соответствующая совместная функция правдоподобия

$$\begin{aligned} \bar{P}_R(A) &= \sum_{\mathcal{J}} I(\Phi(i_1, \dots, i_T, j) \cap A \neq \emptyset) \times \\ &\times m(\Phi(i_1, \dots, i_T, j)). \end{aligned}$$

Здесь  $I(\cdot)$  – индикаторная функция, принимающая значение 1, если ее аргумент принимает значение “истина”. Символ  $R$  означает тот факт, что граница получена при условии независимости случайных множеств.

Если принимается условие независимости случайных множеств, то выполняется равенство

$$m(\Phi(i_1, \dots, i_T, j)) = m(\mathbf{V}_{1i_1}) \cdots m(\mathbf{V}_{Ti_T}) m(\mathbf{r}_j). \quad (10.4)$$

Нижняя вероятность  $\underline{P}_R(A)$  есть соответствующая совместная функция доверия<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} \underline{P}_R(A) &= \sum_{\mathcal{J}} (1 - I(\Phi(i_1, \dots, i_T, j) \cap A^c \neq \emptyset)) \times \\ &\times m(\Phi(i_1, \dots, i_T, j)). \end{aligned}$$

Заметим, что  $\Phi(i_1, \dots, i_T, j)$  соответствует интервалу NPV, обозначенному

$$\mathbf{NPV}(i_1, \dots, i_T, j) = [\mathbf{NPV}^L(i_1, \dots, i_T, j), \mathbf{NPV}^U(i_1, \dots, i_T, j)]$$

и полученному из (10.1) подстановкой интервалов оборотного сальдо поступлений с номерами  $i_1, \dots, i_T$  и интервалов ставки дисконтирования с номером  $j$  в (10.1). Поэтому выполняется равенство

$$m(\mathbf{NPV}(i_1, \dots, i_T, j)) = m(\Phi(i_1, \dots, i_T, j)).$$

При этом расчет NPV осуществляется при помощи правил вычисления функции интервальных переменных, т.е.

$$\mathbf{NPV}^L(i_1, \dots, i_T, j) = \inf \left( V_0 + \sum_{k=1}^T V_k (1+r)^{-k} \right) \quad (10.5)$$

---

<sup>9</sup>Здесь предполагается, что пересечение  $\Psi(i_1, \dots, i_T, j) \cap A^c$  пусто, если выполняется условие  $\Psi(i_1, \dots, i_T, j) \subset A$ .

при ограничениях  $V_k \in \mathbf{V}_{kik}$ ,  $k = 1, \dots, T$ , и  $r \in \mathbf{r}_j$ .

Верхняя граница  $\text{NPV}^{\text{U}}$  вычисляется таким же образом заменой операции  $\inf$  на  $\sup$ .

Тогда при  $A = (-\infty, z) \subset \mathbb{R}$  нижняя и верхняя границы вероятностей<sup>10</sup>, того что  $\text{NPV}$  как случайная величина не больше  $z$ , определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{P}_R(\text{NPV} \leq z) &= \sum_{\mathcal{J}} I(\text{NPV}^{\text{L}}(i_1, \dots, i_T, j) \leq z) \times \\ &\times m(\mathbf{NPV}(i_1, \dots, i_T, j)), \end{aligned} \quad (10.6)$$

$$\begin{aligned} P_R(\text{NPV} \leq z) &= \sum_{\mathcal{J}} I(\text{NPV}^{\text{U}}(i_1, \dots, i_T, j) \leq z) \times \\ &\times m(\mathbf{NPV}(i_1, \dots, i_T, j)). \end{aligned} \quad (10.7)$$

Таким образом, вычисляя нижнюю и верхнюю границы  $\text{NPV}$ , из  $n_1 \cdots n_T m$  возможных комбинаций интервалов оборотного сальдо поступлений и ставки дисконтирования, можно найти нижнюю и верхнюю границы вероятности  $P(\text{NPV} \leq z)$  для произвольных значений  $z \in \mathbb{R}$ .

В частности, границы вероятности события  $\text{NPV} > 0$  вычисляются с использованием равенств

$$\begin{aligned} \bar{P}_R(\text{NPV} > 0) &= 1 - \underline{P}_R(\text{NPV} \leq 0), \\ \underline{P}_R(\text{NPV} > 0) &= 1 - \bar{P}_R(\text{NPV} \leq 0) \end{aligned} \quad (10.8)$$

благодаря свойствам нижней и верхней вероятностей [131].

Имея нижнее и верхнее распределения вероятностей, вычисляется нижняя граница  $\underline{\mathbb{E}}_R \text{NPV}$  и верхняя граница  $\bar{\mathbb{E}}_R \text{NPV}$  математического ожидания  $\text{NPV}$  как

$$\bar{\mathbb{E}}_R \text{NPV} = \max_{\underline{P}_R \leq P_R \leq \bar{P}_R} \int_{\mathbb{R}} z dP_R(\text{NPV} \leq z), \quad (10.9)$$

$$\underline{\mathbb{E}}_R \text{NPV} = \min_{\underline{P}_R \leq P_R \leq \bar{P}_R} \int_{\mathbb{R}} z dP_R(\text{NPV} \leq z). \quad (10.10)$$

<sup>10</sup>Точки нижней и верхней функций распределения вероятностей  $\text{NPV}$ .



Максимум в задаче (10.9) достигается при  $P_R = \bar{P}_R$  и минимум в задаче (10.10) достигается при  $P_R = \underline{P}_R$ . Заметим, что распределения вероятностей NPV являются таким ступенчатыми функциями, что нижнее распределение имеет скачки в точках  $z = \text{NPV}^U(i_1, \dots, i_T, j)$ , а верхнее распределение имеет скачки в точках  $z = \text{NPV}^L(i_1, \dots, i_T, j)$ . Отсюда следуют выражения для границы математического ожидания NPV:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}_R \text{NPV} &= \sum_{\mathcal{J}} \text{NPV}^U(i_1, \dots, i_T, j) \times \\ &\times m(\text{NPV}(i_1, \dots, i_T, j)), \end{aligned} \quad (10.11)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{E}}_R \text{NPV} &= \sum_{\mathcal{J}} \text{NPV}^L(i_1, \dots, i_T, j) \times \\ &\times m(\text{NPV}(i_1, \dots, i_T, j)). \end{aligned} \quad (10.12)$$

Интересно отметить, что полученные выражения для нижней и верхней границ математического ожидания NPV являются границами ожидаемой полезности, основанной на использовании интеграла Шоке [12, 66, 80]. Последующее решение задач оптимизации зависит от монотонности NPV как функции оборотных сальдо поступлений и ставки дисконтирования.

### 10.3.3. Отсутствие сведений о независимости

Иногда сложно утверждать о независимости параметров NPV, особенно когда одни и те же эксперты предоставляют оценки об оборотном сальдо поступлений в различные периоды времени. Когда знания о случайных параметрах ограничены только информацией о каждом параметре отдельно и ничего не известно о взаимодействии этих параметров, модель неизвестного взаимодействия или отсутствия сведений о независимости является наиболее предпочтительной [15, 33] (см. главу 4). В этом случае известны только маргинальные распределения вероятностей, а верхняя и нижняя границы вероятностей события  $\text{NPV} \leq z$  определяются из решения сле-

дующих задач оптимизации:

$$\begin{aligned} \bar{P}_U(\text{NPV} \leq z) &= \max \sum_{\mathcal{J}} I(\text{NPV}^L(i_1, \dots, i_T, j) \leq z) \times \\ &\times m(\mathbf{NPV}(i_1, \dots, i_T, j)), \end{aligned} \quad (10.13)$$

$$\begin{aligned} \underline{P}_U(\text{NPV} \leq z) &= \min \sum_{\mathcal{J}} I(\text{NPV}^U(i_1, \dots, i_T, j) \leq z) \times \\ &\times m(\mathbf{NPV}(i_1, \dots, i_T, j)) \end{aligned} \quad (10.14)$$

при ограничениях

$$m(\mathbf{V}_{ki_k}) = \sum_{\mathcal{J}(k)} m(\mathbf{NPV}(i_1, \dots, i_T, j)), \quad k = 1, \dots, T, \quad (10.15)$$

$$m(\mathbf{r}_j) = \sum_{\mathcal{J}(j)} m(\mathbf{NPV}(i_1, \dots, i_T, j)). \quad (10.16)$$

Здесь  $m(\mathbf{NPV}(i_1, \dots, i_T, j))$  – переменные оптимизации;  $\text{NPV}^L(\cdot)$  и  $\text{NPV}^U(\cdot)$  вычисляются в соответствии с (10.5);  $\mathcal{J}(k)$  – множество всех индексных векторов  $(i_1, \dots, i_T, j)$  с фиксированным  $k$ -м элементом  $i_k$ ;  $\mathcal{J}(j)$  – множество всех индексных векторов  $(i_1, \dots, i_T, j)$  с фиксированным последним элементом  $j$ . Символ  $U$  означает тот факт, что границы получены при условии отсутствия сведений о независимости. Ограничения в задачах оптимизации отражают тот факт, что известны только маргинальные базовые вероятности подмножества и нельзя представить совместные базовые вероятности как произведение маргинальных вероятностей.

Из задач (10.13)–(10.16) видно, что они являются линейными и могут быть решены известным симплекс-методом.

#### 10.3.4. Строгая независимость

Строгая независимость [15, 33] имеет место, если исходы выбора значений неопределенных параметров статистически независимы и только произведения маргинальных распределений вероятностей рассматриваются из всего множества распределений случайных величин. Из условия строгой зависи-

мости следует, что знание исхода в эксперименте с одной случайной величиной никаким образом не меняет степени неопределенности об исходе другой случайной величины (см. главу 4).

Фетц и Обергугенбергер [33] доказали одно важное свойство совместных вероятностных распределений, которые в упрощенном виде и в терминах задачи вычисления NPV можно сформулировать следующим образом. Верхняя граница вероятности события  $A \subseteq \mathbb{R}^{T+1}$  при условии строгой независимости может быть получена при помощи решения нелинейной задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \bar{P}_S(A) &= \\ &= \sum_{\mathcal{J}} m(\Phi(i_1, \dots, i_T, j)) I_A(v_{1i_1}, \dots, v_{Ti_T}, r_j) \rightarrow \max \end{aligned} \quad (10.17)$$

при ограничениях

$$v_{ki_k} \in \mathbf{V}_{ki_k}, \quad k = 1, \dots, T, \quad r_j \in \mathbf{r}_j.$$

Здесь  $I_A(v_{1i_1}, \dots, v_{Ti_T}, r_j)$  – индикаторная функция события  $A$ . Символ  $S$  означает тот факт, что граница получена при условии строгой независимости. Нижняя граница вероятности  $\underline{P}_S(A)$  вычисляется аналогичным образом, минимизируя целевую функцию (10.17). Если  $A = (-\infty, z] \subset \mathbb{R}$ , то нижняя и верхняя границы вероятности того, что NPV меньше или равно  $z$ , определяются как

$$\begin{aligned} \underline{P}_S(\text{NPV} \leq z) &= \inf \sum_{\mathcal{J}} m(\text{NPV}(i_1, \dots, i_T, j)) \times \\ &\times I(\text{NPV}(i_1, \dots, i_T, j) \leq z), \end{aligned} \quad (10.18)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_S(\text{NPV} \leq z) &= \sup \sum_{\mathcal{J}} m(\text{NPV}(i_1, \dots, i_T, j)) \times \\ &\times I(\text{NPV}(i_1, \dots, i_T, j) \leq z) \end{aligned} \quad (10.19)$$

при ограничениях

$$v_{ki_k} \in \mathbf{V}_{ki_k}, \quad k = 1, \dots, T, \quad r_j \in \mathbf{r}_j,$$

$$\text{NPV}(i_1, \dots, i_T, j) = V_0 + \sum_{k=1}^T \frac{v_{ki_k}}{(1+r_j)^k}.$$

Здесь  $\text{NPV}(i_1, \dots, i_T, j) \in \mathbf{NPV}(i_1, \dots, i_T, j)$  – точка в интервале  $\mathbf{NPV}(i_1, \dots, i_T, j)$ , полученная подстановкой значений  $v_{ki_k}$  и  $r_j$  в (10.1). В общем, задачи (10.18) и (10.19) являются нелинейными и их решение – сложная задача. В отличие от независимости случайных множеств каждая переменная оптимизации  $v_{ki_k}$  присутствует в  $n_1 \cdots n_T m / n_k$  членах суммы в целевой функции, что делает решение более сложным. Однако свойство монотонности NPV позволяет существенно упростить задачу.

### 10.3.5. Монотонная функция NPV, независимость случайных множеств и неизвестное взаимодействие

Так как монотонность NPV упрощает анализ математического ожидания NPV и вероятности  $\Pr(\text{NPV} > 0)$ , то случай монотонной функции NPV анализируется в первую очередь.

Если NPV является монотонной, то границы  $\text{NPV}^L(i_1, \dots, i_T, j)$  и  $\text{NPV}^U(i_1, \dots, i_T, j)$  могут быть достаточно просто вычислены следующим образом:

$$\text{NPV}^L(i_1, \dots, i_T, j) = V_0 + \sum_{k=1}^T V_{ki_k}^L (1+r_j^U)^{-k}, \quad (10.20)$$

$$\text{NPV}^U(i_1, \dots, i_T, j) = V_0 + \sum_{k=1}^T V_{ki_k}^U (1+r_j^L)^{-k}. \quad (10.21)$$

Подставляя эти границы в (10.6)–(10.7) и (10.11)–(10.12), используя (10.4) и перебрав  $n_1 \cdots n_T m$  элементов множества  $\mathcal{J}$ , получим границы вероятности  $P(\text{NPV} > 0)$  и математического ожидания  $\mathbb{E}\text{NPV}$ .

**Пример 10.2.** Следующая информация о проекте имеется в распоряжении:

$$V_0 = -2, \quad \mathbf{V}_{11} = [0, 3], \quad c_{11} = 4, \quad \mathbf{V}_{12} = [1.5, 2],$$

$$\begin{aligned}
c_{12} &= 1, \quad n_1 = 2, \quad N_1 = 5, \\
\mathbf{V}_{21} &= [3, 4], \quad c_{21} = 2, \quad n_2 = 1, \quad N_2 = 2, \\
\mathbf{r}_1 &= [0.1, 0.2], \quad d_1 = 1, \quad \mathbf{r}_2 = [0.15, 0.25], \\
d_2 &= 1, \quad m = 2, \quad M = 2.
\end{aligned}$$

Тогда NPV – монотонная функция, так как все возможные значения  $V_1$  и  $V_2$  являются неотрицательными. Множество  $\mathcal{J}$  состоит из следующих элементов:

$$(1, 1, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 2), (2, 1, 2).$$

Базовые вероятности интервалов имеют вид:

$$\begin{aligned}
m(\mathbf{V}_{11}) &= 4/5, \quad m(\mathbf{V}_{12}) = 1/5, \quad m(\mathbf{V}_{21}) = 1, \\
m(\mathbf{r}_1) &= 1/2, \quad m(\mathbf{r}_2) = 1/2.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\text{NPV}^L(1, 1, 1) &= -2 + 0(1 + 0.2)^{-1} + 3(1 + 0.2)^{-2} = 0.08, \\
\text{NPV}^U(1, 1, 1) &= -2 + 3(1 + 0.1)^{-1} + 4(1 + 0.1)^{-2} = 4.03, \\
m(\mathbf{NPV}(1, 1, 1)) &= 4/5 \cdot 1 \cdot 1/2 = 2/5.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом получим  $\text{NPV}^L(\cdot)$  и  $\text{NPV}^U(\cdot)$  для всех возможных векторов  $(i_1, i_2, j)$ :

$$\begin{aligned}
\text{NPV}^L(2, 1, 1) &= 1.33, \quad \text{NPV}^L(2, 1, 2) = 1.12, \quad \text{NPV}^L(1, 1, 2) = -0.08, \\
\text{NPV}^U(2, 1, 1) &= 3.12, \quad \text{NPV}^U(2, 1, 2) = 2.76, \quad \text{NPV}^U(1, 1, 2) = 3.63.
\end{aligned}$$

Из (10.6)–(10.7) следует, что  $\underline{P}_R(\text{NPV} \leq 0) = 0$  и

$$\overline{P}_R(\text{NPV} \leq 0) = m(\mathbf{NPV}(1, 1, 2)) = 0.4.$$

Отсюда нижняя и верхняя границы вероятности  $P_R(\text{NPV} > 0)$  равны  $\underline{P}_R(\text{NPV} > 0) = 0.6$  и  $\overline{P}_R(\text{NPV} > 0) = 1$ . Нижняя и верхняя границы математического ожидания могут быть найдены из (10.11)–(10.12). Они равны  $\underline{\mathbb{E}}_R \text{NPV} = 0.26$  и  $\overline{\mathbb{E}}_R \text{NPV} = 3.66$  соответственно.

В случае отсутствия информации о независимости, подставляя (10.20)–(10.21) в целевые функции (10.13)–(10.14), получаем стандартную задачу линейного программирования.

**Пример 10.3.** Вернемся к примеру 10.2 и определим вероятностные характеристики NPV при условии отсутствия информации о независимости или при неизвестном взаимодействии. Если обозначить  $x_{ijk} = m(\mathbf{NPV}(i, j, k))$  для сокращения записи, то задача линейного программирования для вычисления верхней вероятности имеет вид:

$$\bar{P}_U(\text{NPV} \leq 0) = x_{112} \rightarrow \max$$

при ограничениях  $x_{ijk} \geq 0, i = 1, 2, j = 1, k = 1, 2$ , и

$$4/5 = x_{111} + x_{112},$$

$$1/5 = x_{211} + x_{212},$$

$$1 = x_{111} + x_{112} + x_{211} + x_{212},$$

$$1/2 = x_{111} + x_{211},$$

$$1/2 = x_{112} + x_{212}.$$

Отсюда  $\bar{P}_U(\text{NPV} \leq 0) = 0.5$ . Нижняя граница вероятности равна 0 так как  $\text{NPV}^U(\cdot) > 0$  для всех возможных значений  $i, j, k$ . Это значит, что  $\underline{P}_U(\text{NPV} > 0) = 0.5, \bar{P}_U(\text{NPV} > 0) = 1$  и

$$\begin{aligned} & [\underline{P}_R(\text{NPV} > 0), \bar{P}_R(\text{NPV} > 0)] \subseteq \\ & \subseteq [\underline{P}_U(\text{NPV} > 0), \bar{P}_U(\text{NPV} > 0)]. \end{aligned}$$

### 10.3.6. Монотонная функция NPV, строгая независимость

Индикаторные функции в задаче (10.19) являются невозрастающими для фиксированного  $z$ . Кроме того, каждый коэффициент  $m(\mathbf{NPV}(i_1, \dots, i_T, j))$  в сумме больше 0. Следовательно, если NPV – монотонная функция, то, принимая  $v_{ki_k} = V_{ki_k}^U$  для всех  $k = 1, \dots, T$  и  $r_j = r_j^L$  в качестве оптимальных значений, получим максимальные значения всех возможных индикаторных функций  $I(\text{NPV}(i_1, \dots, i_T, j) \leq z)$ . Это означает, что верхняя граница вероятности  $\bar{P}_S(\text{NPV} \leq z)$  совпадает с (10.6). То же самое можно сказать и о верхней границе вероятности  $\underline{P}_S(\text{NPV} \leq z)$ . Тогда нижняя  $\underline{\mathbb{E}}_S \text{NPV}$  и верхняя  $\bar{\mathbb{E}}_S \text{NPV}$  границы математического ожидания определяются при помощи (10.11)–(10.12). Рассматриваемые границы в случае строгой независимости не отличаются от аналогичных границ при условии независимости случайных множеств. Эта особенность имеет место только для монотонных

NPV. Здесь числовой пример не рассматривается, так как результаты совпадают с примером 10.2.

### 10.3.7. Немонотонная функция NPV, независимость случайных множеств и неизвестное взаимодействие

Если NPV не обладает свойством монотонности, то нельзя найти  $\text{NPV}^L(i_1, \dots, i_T, j)$  и  $\text{NPV}^U(i_1, \dots, i_T, j)$  подстановкой соответствующих границ интервалов  $\mathbf{V}_{1i_1}, \dots, \mathbf{V}_{Ti_T}, \mathbf{r}_j$  в (10.1). Следовательно, задача оптимизации (10.5) должна быть решена для каждого элемента  $\mathcal{J}$  при вычислении  $\text{NPV}^L(\cdot)$  и аналогичная задача должна быть решена при вычислении  $\text{NPV}^U(\cdot)$ . Однако NPV – неубывающая функция переменных, соответствующих оборотному салдо поступлений и платежей, при любых значениях параметров. Поэтому задачу оптимизации можно упростить:

$$\text{NPV}^L(i_1, \dots, i_T, j) = \inf_{r \in \mathbf{r}_j} \left( V_0 + \sum_{k=1}^T V_{ki_k}^L (1+r)^{-k} \right),$$

$$\text{NPV}^U(i_1, \dots, i_T, j) = \sup_{r \in \mathbf{r}_j} \left( V_0 + \sum_{k=1}^T V_{ki_k}^U (1+r)^{-k} \right).$$

Тогда анализ функции только одной переменной необходимо выполнить для вычисления максимального и минимального значений этой функции в интервале  $\mathbf{r}_j$ . При этом выражения (10.6)–(10.7) и (10.11)–(10.12) остаются без изменений.

Аналогичные вычисления границ  $\text{NPV}^L(\cdot)$  и  $\text{NPV}^U(\cdot)$  выполняются в случае отсутствия информации о независимости.

**Пример 10.4.** Вернемся к примеру 10.1 и выполним анализ NPV при условии независимости случайных множеств. Здесь

$$m(\mathbf{V}_{11}) = 3/4, \quad m(\mathbf{V}_{12}) = 1/4, \quad m(\mathbf{V}_{21}) = 1,$$

$$m(\mathbf{r}_1) = 1/2, \quad m(\mathbf{r}_2) = 1/2.$$

Можно заметить, что NPV не является монотонной функцией переменной  $r$ , когда, например,  $V_1 = -4$  и  $V_2 = 2.4$ . Функция в этом случае имеет минимум в точке  $r = 0.2$ . Тогда

$$\text{NPV}^L(1, 1, 1) = \inf_{r \in [0.1, 0.2]} (-4(1+r)^{-1} + 2.4(1+r)^{-2}) = -1.67,$$

$$\text{NPV}^L(1, 1, 2) = \inf_{r \in [0.15, 0.25]} (-4(1+r)^{-1} + 2.4(1+r)^{-2}) = -1.67.$$

Аналогично получим

$$\text{NPV}^L(2, 1, 2) = -0.024, \quad \text{NPV}^L(2, 1, 1) = 0.042,$$

$$\text{NPV}^U(1, 1, 1) = 3.06, \quad \text{NPV}^U(1, 1, 2) = 2.68,$$

$$\text{NPV}^U(2, 1, 1) = 6.69, \quad \text{NPV}^U(2, 1, 2) = 6.16.$$

Из (10.6)–(10.7) следует, что  $\underline{P}_R(\text{NPV} \leq 0) = 0$  и

$$\begin{aligned} \overline{P}_R(\text{NPV} \leq 0) &= m(\mathbf{NPV}(1, 1, 1)) + \\ &+ m(\mathbf{NPV}(1, 1, 2)) + m(\mathbf{NPV}(2, 1, 2)) = 0.875. \end{aligned}$$

Отсюда  $\underline{P}_R(\text{NPV} > 0) = 0.125$  и  $\overline{P}_R(\text{NPV} > 0) = 1$ . Нижняя и верхняя границы математического ожидания вычисляются на основе (10.11)–(10.12) и равны  $\underline{\mathbb{E}}_R \text{NPV} = -1.24$  и  $\overline{\mathbb{E}}_R \text{NPV} = 3.77$  соответственно.

**Пример 10.5.** Вернемся к примеру 10.1 и найдем характеристики NPV при условии отсутствия информации о независимости, используя промежуточные результаты примера 10.4. Если обозначить  $x_{ijk} = m(\mathbf{NPV}(i, j, k))$ , то задача линейного программирования для вычисления верхней границы вероятности имеет вид:

$$\overline{P}_U(\text{NPV} \leq 0) = x_{112} + x_{112} + x_{212} \rightarrow \max$$

при ограничениях  $x_{ijk} \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1$ ,  $k = 1, 2$  и

$$3/4 = x_{111} + x_{112},$$

$$1/4 = x_{211} + x_{212},$$

$$1 = x_{111} + x_{112} + x_{211} + x_{212},$$

$$1/2 = x_{111} + x_{211},$$

$$1/2 = x_{112} + x_{212}.$$

Отсюда  $\overline{P}_U(\text{NPV} \leq 0) = 1$ . Нижняя граница вероятности равна 0, так как  $\text{NPV}^U(\cdot) > 0$  для всех возможных значений  $i, j, k$ . Отсюда следует, что  $\underline{P}_U(\text{NPV} > 0) = 0$  и  $\overline{P}_U(\text{NPV} > 0) = 1$ , т.е. нельзя принимать какое-либо решение о проекте на основе имеющейся информации и при условии неизвестного взаимодействия случайных величин.



### 10.3.8. Немонотонная функция NPV, строгая независимость

Для решения задач оптимизации (10.18)–(10.19) при условии строгой независимости используются свойства, согласно которым NPV является неубывающей функцией оборотных сальдо поступлений и платежей, и индикаторные функции в (10.18)–(10.19) являются неубывающими. Тогда

$$\begin{aligned} \underline{P}_S(\text{NPV} \leq z) &= \inf \sum_{\mathcal{J}} m(\mathbf{NPV}(i_1, \dots, i_T, j)) \times \\ &\times I(\text{NPV}^U(i_1, \dots, i_T, j) \leq z), \end{aligned} \quad (10.22)$$

$$\begin{aligned} \overline{P}_S(\text{NPV} \leq z) &= \sup \sum_{\mathcal{J}} m(\mathbf{NPV}(i_1, \dots, i_T, j)) \times \\ &\times I(\text{NPV}^L(i_1, \dots, i_T, j) \leq z) \end{aligned} \quad (10.23)$$

при ограничениях  $r_j \in \mathbf{r}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Здесь  $\text{NPV}^L(\cdot)$  и  $\text{NPV}^U(\cdot)$  вычисляются подстановкой  $V_{ki_k}^L$  и  $V_{ki_k}^U$  в (10.1) соответственно.

Обозначим  $\mathcal{J}_0 = \{(i_1, \dots, i_T) : i_k = 1, \dots, n_k, k = 1, \dots, T\}$ . Целевые функции (10.22)–(10.23) можно переписать как

$$\begin{aligned} \underline{P}_S(\text{NPV} \leq z) &= \sum_{j=1}^m m(\mathbf{r}_j) \times \\ &\times \inf_{r_j \in \mathbf{r}_j} \sum_{\mathcal{J}_0} \prod_{k=1}^T m(\mathbf{V}_{ki_k}) I(\text{NPV}^U(i_1, \dots, i_T, j) \leq z), \end{aligned} \quad (10.24)$$

$$\begin{aligned} \overline{P}_S(\text{NPV} \leq z) &= \sum_{j=1}^m m(\mathbf{r}_j) \times \\ &\times \sup_{r_j \in \mathbf{r}_j} \sum_{\mathcal{J}_0} \prod_{k=1}^T m(\mathbf{V}_{ki_k}) I(\text{NPV}^L(i_1, \dots, i_T, j) \leq z). \end{aligned} \quad (10.25)$$

Получены  $m$  оптимизационных задач для вычисления каждой границы и каждая задача оптимизации имеет одну переменную  $r_j$ , ограниченную интервалом  $\mathbf{r}_j$ . Из (10.24)–(10.25)

видно, что главное отличие между задачами оптимизации при условиях строгой независимости и независимости случайных множеств заключается в том, что для случая независимости случайных множеств необходимо искать оптимальные значения  $\mathbf{r}_j$  на каждом совместном случайном множестве независимо. В случае строгой независимости необходимо найти одно оптимальное значение  $\mathbf{r}_j$  для всех  $(i_1, \dots, i_T, j)$  одновременно. Из этого следует, что область допустимых решений меньше при строгой независимости и поэтому этот тип независимости приводит к менее размытым результатам.

**Пример 10.6.** Вернемся к примеру 10.1 и проанализируем NPV при условии строгой независимости. Множество  $\mathcal{J}_0$  состоит из следующих элементов:  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ . Рассмотрим первую задачу оптимизации ( $j = 1$ ) для вычисления  $\overline{P}_S(\text{NPV} \leq z)$ :

$$\sup_{r_1 \in \mathbf{r}_1} \sum_{\mathcal{J}_0} m(\mathbf{V}_{1i_1}) m(\mathbf{V}_{2i_2}) I(\text{NPV}^L(i_1, i_2, 1) \leq z).$$

Эта задача может быть переписана следующим образом:

$$\frac{3}{4} \cdot 1 \cdot I(\text{NPV}^L(1, 1, 1) \leq z) + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot I(\text{NPV}^L(2, 1, 1) \leq z) \rightarrow \max$$

при ограничении  $r \in [0.1, 0.2]$ .

Здесь

$$\text{NPV}^L(1, 1, 1) = (-4(1+r)^{-1} + 2.4 \cdot (1+r)^{-2}),$$

$$\text{NPV}^L(2, 1, 1) = (-1.95(1+r)^{-1} + 2.4 \cdot (1+r)^{-2}).$$

Принимая  $z = 0$  и  $r \in [0.1, 0.2]$ , получим оптимальное значение целевой функции  $3/4$ . Если  $r \in [0.15, 0.25]$ , т.е.  $r \in \mathbf{r}_2$ , то оптимальное значение той же самой целевой функции равно 1. Отсюда

$$\overline{P}_S(\text{NPV} \leq z) = 3/4 \cdot 1/2 + 1 \cdot 1/2 = 0.875.$$

Нижняя граница вероятности равна  $\underline{P}_S(\text{NPV} \leq 0) = 0$ . Следовательно,  $\underline{P}_S(\text{NPV} > 0) = 0.125$  и  $\overline{P}_S(\text{NPV} > 0) = 1$ .

Интересно отметить, что ставка дисконтирования является точной в ряде случаев, особенно при выборе проекта из множества возможных проектов при заданном значении ставки дисконтирования. В этом случае NPV – монотонная функция и ее вычисление не представляет каких-либо сложностей.

Более того, при заданной точной ставке дисконтирования результаты, полученные при условиях строгой независимости и независимости случайных множеств, совпадают.

## 10.4. Использование информации об экспертах

Рассмотренные выше подходы для вычисления характеристик NPV предполагали, что об экспертах ничего не известно. Однако дополнительная информация об экспертах в форме их *весов* может быть полезна и позволяет получить более точные результаты<sup>11</sup>.

Пусть  $Q$  экспертов предоставили информацию о каждом параметре NPV, так что  $q$ -й эксперт дал один интервал из  $\mathcal{V}_k$ ,  $k = 1, \dots, T$ , или из  $\mathcal{R}$  (см. (10.2) и (10.3)). Предположим, что интервалы  $\mathbf{V}_{ki}$  предоставлены экспертами с номерами, принадлежащими множеству  $W_{ki}$ . При этом выполняется условие  $W_{ki} \cap W_{kj} = \emptyset$  для  $i \neq j$ . Так как эксперт дает только один интервал параметра NPV, то каждое множество  $W_{ki}$  не может содержать два и более одинаковых чисел. В частности, эксперт с номером  $q$  может не предоставить оценки для некоторых параметров NPV и  $W_{ki}$  в этом случае не содержит  $q$ . То же самое можно сказать о ставке дисконтирования: интервалы  $\mathbf{r}_j$  предоставляются экспертами с номерами из множества  $W_j$ .

Качество оценок  $q$ -го эксперта измеряется весом  $w_q$ , так что выполняется условие  $\sum_{q=1}^Q w_q = 1$ . Для того чтобы учесть информацию об экспертах, вернемся к многозначному отображению, объясняющему функции доверия (см. раздел 2.3). Рассмотрим детально множество  $\Psi$ . Каждая интервальная оценка соответствует точке  $\psi \in \Psi$ . При этом вероятность точки  $\psi$  определяется числом экспертов  $c_{ki}(d_j)$ , предоставивших соответствующую интервальную оценку. Если рассмотреть все  $c_{ki}$  совпадающие точки отдельно, то каждая точка имеет вероятность  $1/N_k$ . Это соответствует случаю, когда все

---

<sup>11</sup>Существует большое число методов, учитывающих качество экспертов [14, 141, 142]. Однако все эти методы предполагают, что эксперты делают точечные оценки. Здесь предлагается адаптировать один из наиболее известных методов весового среднего к интервальным оценкам.

эксперты, предоставившие соответствующий интервал  $\mathbf{V}_{ki}$ , одинаковы. Однако если предположить, что эксперты имеют веса, то каждой “разделенной” точке в  $\Psi$  можно приписать определенный вес. Объединяя  $c_{ki}$  одинаковых точек, соответствующих интервалу  $\mathbf{V}_{ki}$ , получаем суммарный вес точки:

$$\sum_{q=1}^Q w_q I(q \in W_{ki}).$$

Здесь  $I(q \in W_{ki})$  – индикаторная функция, принимающая значение 1, если  $q \in W_{ki}$ . Отсюда базовая вероятность интервала  $\mathbf{V}_{ki}$  может быть пересчитана следующим образом:

$$m(\mathbf{V}_{ki}) = \frac{c_{ki}}{N_k} \sum_{q=1}^Q w_q I(q \in W_{ki}).$$

Так как  $I(q \in W_{ki})$  равна 0 для некоторых значений  $q$ , а условие  $\sum_{i=1}^{n_k} m(\mathbf{V}_{ki}) = 1$  должно выполняться, то базовая вероятность нормализуется:

$$m(\mathbf{V}_{ki}) = \frac{c_{ki}}{C_k N_k} \sum_{q=1}^Q w_q I(q \in W_{ki}),$$

где

$$C_k = \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{q=1}^Q w_q I(q \in W_{ki}).$$

Нормализация требуется при условии  $Q > N_k$ . Базовые вероятности для ставки дисконтирования имеют аналогичный вид:

$$m(\mathbf{r}_j) = \frac{d_j}{CM} \sum_{q=1}^Q w_q I(q \in W_j), \quad C = \sum_{j=1}^m \sum_{q=1}^Q w_q I(q \in W_j).$$

Следует отметить, что учет качества экспертов изменяет только базовые вероятности предоставляемых интервалов и не влияет на процедуру расчета характеристик NPV.

## 10.5. Осторожный анализ NPV с использованием обобщенной модели Дирихле

Приведенные результаты могут быть использованы на практике, если число оценок экспертов параметров NPV достаточно большое. С другой стороны, в реальных задачах не всегда имеется возможность привлечения большого числа экспертов. Получение статистических данных об аналогичных проектах также далеко не простая задача. Поэтому выводы, сделанные при помощи предлагаемых методов анализа, могут быть слишком рискованными.

**Пример 10.7.** Добавим одну интервальную оценку  $[8, 10]$  оборотного сальдо поступлений и платежей во втором периоде  $V_2$  к имеющимся исходным данным в примере 10.1. Тогда при условии независимости случайных множеств получаем границы вероятности:  $\underline{P}_R(\text{NPV} > 0) = 0.563$  и  $\overline{P}_R(\text{NPV} > 0) = 1$ . Те же самые границы получаются при строгой независимости. Можно заметить из новых результатов, что нижняя граница существенно отличается от нижней границы  $\underline{P}_R(\text{NPV} > 0) = 0.125$ , полученной в примере 10.4. Другими словами, одна оценка может кардинально изменить ситуацию принятия решений. С другой стороны, вернемся снова к исходным данным примера 10.1 и добавим много интервалов  $[2.4, 7]$  оборотного сальдо поступлений и платежей во втором периоде  $V_2$ . В этом случае получаем границы  $\underline{P}_R(\text{NPV} > 0) = 0.125$  и  $\overline{P}_R(\text{NPV} > 0) = 1$ , которые не отличаются от тех, что были получены в примере 10.4. Это означает, что число интервалов  $[2.4, 7]$  не влияет на конечный результат для рассматриваемых условий.

Для того чтобы обойти все сложности и противоречия<sup>12</sup>, возникаемые при использовании функций доверия и структур теории Демпстера–Шейфера, можно применить обобщенную модель Дирихле [132], позволяющую расширить функции доверия и правдоподобия [104, 108]. В то же время если необходимо найти нижнюю и верхнюю границы ожидаемых значений NPV, то нужно ограничить множество возможных значений оборотного сальдо поступлений и платежей, а также

---

<sup>12</sup> Аналогичные трудности и противоречия, связанные с использованием частотного определения базовых вероятностей, детально анализировались в разделе 5.7.

ставки дисконтирования некоторыми граничными значениями  $\inf V_k, \sup V_k, \inf r, \sup r$ , так как отсутствие ограничений приводит к условию  $\underline{\mathbb{E}}\text{NPV} \rightarrow -\infty, \overline{\mathbb{E}}\text{NPV} \rightarrow \infty$ . Причиной этого является ненулевая вероятность, приписываемая значениям  $V_k$  и  $r$  вне интервалов. Более того, даже ограничив значения параметров NPV, получаем границы математического ожидания, строго зависящие от значений  $\inf V_k, \sup V_k, \inf r, \sup r$ . Этот недостаток применения обобщенной модели Дирихле не имеет значения, если наша цель – вычисление нижней и верхней границ вероятности того, что NPV превышает некоторое определенное значение.

**Пример 10.8.** Вернемся к примеру 10.1 и проанализируем NPV при условии независимости случайных множеств, используя обобщенную модель Дирихле. В этом случае, добавив одну оценку эксперта [8, 10] оборотного сальдо поступлений и платежей  $V_2$  к имеющейся в примере 10.1 информации и принимая  $s = 1$ , получаем:

$$\varkappa_1 = 0.8, m^*(\mathbf{V}_{11}) = 0.6, m^*(\mathbf{V}_{12}) = 0.2, m^*(\Omega_1) = 0.2,$$

$$\varkappa_2 = 0.5, m^*(\mathbf{V}_{21}) = 0.5, m^*(\Omega_2) = 0.5,$$

$$\varkappa_3 = 2/3, m^*(\mathbf{r}_1) = 1/3, m^*(\mathbf{r}_2) = 1/3, m^*(\Omega_3) = 1/3.$$

Здесь  $\Omega_k = [\inf V_k, \sup V_k], k = 1, 2, \Omega_3 = [\inf r, \sup r]$ . Если предположить, что  $\inf V_k = -10, \sup V_k = 10, \inf r = 0, \sup r = 1$ , то

$$\underline{P}_R(\text{NPV} > 0|1) = 0.29, \overline{P}_R(\text{NPV} > 0|1) = 1,$$

$$\underline{\mathbb{E}}_R\text{NPV} = -3.86, \overline{\mathbb{E}}_R\text{NPV} = 4.24.$$

Можно заметить из результатов, что полученные границы близки к границам, полученным в примере 10.4 без “экстремальной” оценки [8, 10]. Это является следствием того, что обобщенная модель Дирихле позволяет смягчить возможные “выбросы” и противоречивые оценки. Если принять  $s = 2$ , то

$$\underline{P}_R(\text{NPV} > 0|2) = 0.18, \overline{P}_R(\text{NPV} > 0|2) = 1.$$

Следовательно, использование обобщенной модели Дирихле дает возможность получить более осторожные и стабильные границы характеристик NPV.

## 10.6. Оценка риска при наличии двух параметров

Как видно из результатов, полученных выше, оценка характеристик NPV является достаточно сложной вычислительной задачей. Однако в некоторых ситуациях рассматриваются только два параметра: расходы  $X$  и доходы  $Y$ , где  $X, Y \in \Omega \subset \mathbb{R}$ . В этом случае необходимо оценить риск того, что расходы превысят доходы, т.е. найти вероятность  $P(X \geq Y)$ . При этом рассмотрим только два типа независимости: строгая независимость и отсутствие сведений о независимости.

Исходная информация о расходах представлена в виде  $a_1$  интервалов  $A_1$ ,  $a_2$  интервалов  $A_2, \dots$ ,  $a_n$  интервалов  $A_n$ . Информация о доходах представлена в виде  $d_1$  интервалов  $D_1$ ,  $d_2$  интервалов  $D_2, \dots$ ,  $d_m$  интервалов  $D_m$ . Обозначим  $N = \sum_{i=1}^n a_i$  и  $M = \sum_{i=1}^m d_i$ . Тогда для каждого интервала можно определить базовую вероятность  $m_X(A_k) = a_k/N$ ,  $k = 1, \dots, n$ , или  $m_Y(D_k) = d_k/M$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

Заметим, что сведения о расходах образуют интервал функций распределения вероятностей<sup>13</sup>, границы которых являются ступенчатыми функциями (см. разделы 2.4 и 5.10) вида<sup>14</sup>

$$\underline{F}(x|s) = (N + s)^{-1} \sum_{i:\sup A_i \leq x} a_i,$$

$$\bar{F}(x|s) = (N + s)^{-1} \left( s + \sum_{i:\inf A_i \leq x} a_i \right).$$

Аналогичным образом можно записать выражения для граничных функций распределения вероятностей доходов

$$\underline{Q}(y|s) = (M + s)^{-1} \sum_{i:\sup D_i \leq y} d_i,$$

<sup>13</sup>Здесь рассматриваются расширенные функции распределения вероятностей в соответствии с обобщенной моделью Дирихле и параметром  $s$ . Обычные распределения получаются, если принять  $s = 0$ .

<sup>14</sup>Граничные условия для множества значений  $X$  и  $Y$  для сокращения записи опускаются.

$$\bar{Q}(y|s) = (M + s)^{-1} \left( s + \sum_{i: \inf D_i \leq y} d_i \right).$$

### 10.6.1. Строгая независимость

Рассмотрим случай, когда случайные величины  $X$  и  $Y$  являются строго независимы. При известных функциях распределения вероятностей величин  $X$  и  $Y$ , вероятность достаточно просто вычисляется:

$$\begin{aligned} P_S(X \geq Y|s) &= \int_{\Omega} q(y|s)(1 - F(y|s))dy = \\ &= 1 - \int_{\Omega} f(x|s)(1 - Q(x|s))dx, \end{aligned}$$

где  $f$  и  $q$  – функции плотности вероятности  $X$  и  $Y$  соответственно.

В силу монотонности функции  $X - Y$  по  $X$  и по  $Y$  нижнюю и верхнюю границы вероятности  $P(X \geq Y|s)$  можно выразить через соответствующие границы распределений  $F$  и  $Q$  следующим образом<sup>15</sup>:

$$\begin{aligned} \underline{P}_S(X \geq Y|s) &= \int_{\Omega} \underline{q}(y|s)(1 - \bar{F}(y|s))dy, \\ \bar{P}_S(X \geq Y|s) &= 1 - \int_{\Omega} \underline{f}(x|s)(1 - \bar{Q}(x|s))dx, \end{aligned}$$

где  $\underline{f} = d\underline{F}/dx$  и  $\underline{q} = d\underline{Q}/dx$ .

Так как  $\underline{F}$  и  $\underline{Q}$  – ступенчатые функции, то

$$\begin{aligned} \underline{q}(x|s) &= (M + s)^{-1} \sum_{i: \sup D_i \leq x} d_i \delta(x - \sup D_i), \\ \underline{f}(x|s) &= (N + s)^{-1} \sum_{i: \sup A_i \leq x} a_i \delta(x - \sup A_i), \end{aligned}$$

где  $\delta(x - a)$  – функция Дирака.

<sup>15</sup> Аналогичные выражения получены в работах [128, 129].



Подставляя последние выражения для плотностей в выражения для  $\underline{P}(X \geq Y|s)$  и  $\overline{P}(X \geq Y|s)$ , получаем после упрощения:

$$\begin{aligned} \underline{P}_S(X \geq Y|s) &= \frac{1}{(M+s)(N+s)} \times \\ &\times \sum_{i=1}^m d_i \left( N - \sum_{j:\inf A_j \leq \sup D_i} a_j \right), \end{aligned} \quad (10.26)$$

$$\begin{aligned} \overline{P}_S(X \geq Y|s) &= 1 - \frac{1}{(M+s)(N+s)} \times \\ &\times \sum_{i=1}^n a_i \left( M - \sum_{j:\inf D_j \leq \sup A_i} d_j \right). \end{aligned} \quad (10.27)$$

Таким образом, получены простые выражения для вычисления границ риска того, что расходы превысят доходы. В частности, если  $s = 0$ , то

$$\underline{P}_S(X \geq Y|0) = \sum_{i=1}^m m_Y(D_i) \left( 1 - \sum_{j:\inf A_j \leq \sup D_i} m_X(A_j) \right),$$

$$\begin{aligned} \overline{P}_S(X \geq Y|0) &= 1 - \\ &- \sum_{i=1}^n m_X(A_i) \left( 1 - \sum_{j:\inf D_j \leq \sup A_i} m_Y(D_j) \right). \end{aligned}$$

### 10.6.2. Отсутствие сведений о независимости

Определим границы вероятности  $P_U(X \geq Y|s)$  при условии, что нет никаких сведений о независимости. В работах [128, 129] получены соответствующие выражения:

$$\underline{P}_U(X \geq Y|s) = \max_{z \geq 0} \max \{0, \underline{Q}(z|s) - \overline{F}(z|s)\},$$

$$\overline{P}_U(X \geq Y|s) = 1 - \max_{z \geq 0} \max \{0, \underline{F}(z|s) - \overline{Q}(z|s)\}.$$

Подставляя выражения для границ функций распределения  $F$  и  $Q$  в приведенные выше выражения, получаем:

$$\underline{P}_U(X \geq Y|s) = \max_{z \geq 0} \max \{0, V(z)\},$$

$$\bar{P}_U(X \geq Y|s) = 1 - \max_{z \geq 0} \max \{0, W(z)\}.$$

Здесь

$$V(z) = \frac{1}{M+s} \sum_{i: \sup D_i \leq z} d_i - \frac{s}{N+s} - \frac{1}{N+s} \sum_{i: \inf A_i \leq z} a_i,$$

$$W(z) = \frac{1}{N+s} \sum_{i: \sup A_i \leq z} a_i - \frac{s}{M+s} - \frac{1}{M+s} \sum_{i: \inf D_i \leq z} d_i.$$

Так как граничные функции распределения являются ступенчатыми, то последние выражения можно упростить:

$$\underline{P}_U(X \geq Y|s) = \max_{i=1, \dots, m} \max \{0, V_i\}, \quad (10.28)$$

$$\bar{P}_U(X \geq Y|s) = 1 - \max_{i=1, \dots, n} \max \{0, W_i\}. \quad (10.29)$$

Здесь

$$V_i = \frac{1}{M+s} \sum_{j=1}^i d_j - \frac{s}{N+s} - \frac{1}{N+s} \sum_{j: \inf A_j \leq \sup D_i} a_j,$$

$$W_i = \frac{1}{N+s} \sum_{j=1}^i a_j - \frac{s}{M+s} - \frac{1}{M+s} \sum_{j: \inf D_j \leq \sup A_i} d_j.$$

В частности, если  $s = 0$ , то

$$V_i = \sum_{j=1}^i m_Y(D_j) - \sum_{j: \inf A_j \leq \sup D_i} m_X(A_j),$$

$$W_i = \frac{1}{N+s} \sum_{j=1}^i m_X(A_j) - \sum_{j: \inf D_j \leq \sup A_i} m_Y(D_j).$$

**Пример 10.9.** Эксперт предоставил одну интервальную оценку  $A_1 = [1, 5]$  ( $N = 1$ ) о расходах и одну интервальную оценку  $D_1 = [6, 10]$  ( $M = 1$ ) о доходах. В соответствии с (10.26) и (10.27), получаем:

$$\underline{P}_S(X \geq Y|s) = (1 + s)^{-1}(1 + s)^{-1}(1 - 1) = 0,$$

$$\overline{P}_S(X \geq Y|s) = 1 - (1 + s)^{-1}(1 + s)^{-1}.$$

Если предположить, что  $s = 0$ , имеем  $\underline{P}_S(X \geq Y|0) = 0$  и  $\overline{P}_S(X \geq Y|0) = 0$ , т.е. риск равен 0. Очевидно, что это заключение, основанное на одиночных оценках, ошибочно. Однако если взять  $s = 1$ , то

$$\underline{P}_S(X \geq Y|1) = 0, \quad \overline{P}_S(X \geq Y|1) = 0.75.$$

Этот результат заслуживает большего доверия, а его значительная размытость отражает факт отсутствия достаточных исходных данных.

**Пример 10.10.** Эксперты предоставили  $N = 100$  интервалов о расходах и  $M = 100$  интервалов о доходах. Интервалы представлены в табл. 10.1. Предполагается, что расходы и доходы статистически строго независимы. Если принять  $s = 0$ , то из (10.26) и (10.27) следует, что

$$\underline{P}_S(X \geq Y|0) = 0, \quad \overline{P}_S(X \geq Y|0) = 0.17.$$

Если  $s = 1$ , то

$$\underline{P}_S(X \geq Y|1) = 0, \quad \overline{P}_S(X \geq Y|1) = 0.19.$$

Можно увидеть из полученных результатов, что границы незначительно зависят от параметра  $s$ . Это связано с тем, что количество исходных интервальных оценок достаточно большое.

Теперь пусть только  $N = 6$  тех же интервалов расходов и  $M = 5$  тех же интервалов доходов примерно в той же пропорции представлены экспертами (см. табл. 10.2). Предполагается, что эти интервалы – часть 200 интервалов, рассмотренных в предыдущем случае. Если  $s = 0$ , то

$$\underline{P}_S(X \geq Y|0) = 0, \quad \overline{P}_S(X \geq Y|0) = 0.1.$$

Полученный результат является достаточно рискованным, так как  $\overline{P}_S(X \geq Y|0) = 0.1 < 0.17$ . Однако если взять  $s = 1$ , то

$$\underline{P}_S(X \geq Y|1) = 0, \quad \overline{P}_S(X \geq Y|1) = 0.36.$$

Таблица 10.1. 100 интервалов расходов и 100 интервалов доходов

Расходы			Доходы		
$i$	$a_i$	$A_i$	$i$	$d_i$	$D_i$
1	17	[10, 15]	1	25	[16, 22]
2	59	[12, 13]	2	13	[18, 20]
3	24	[12, 17]	3	27	[14, 18]
			4	35	[20, 24]

Таблица 10.2. 6 интервалов расходов и 5 интервалов доходов

Расходы			Доходы		
$i$	$a_i$	$A_i$	$i$	$d_i$	$D_i$
1	1	[10, 15]	1	1	[16, 22]
2	4	[12, 13]	2	1	[18, 20]
3	1	[12, 17]	3	1	[14, 18]
			4	2	[20, 24]

Этот результат существенно более осторожный, так как выполняется условие  $\bar{P}_S(X \geq Y|1) = 0.36 > 0.17$ .

Пусть два интервала [12, 13] расходов и один интервал [20, 24] доходов дополнительно получены после опроса новых экспертов. Тогда  $N = 8$ ,  $a_2 = 6$ ,  $M = 6$ ,  $d_4 = 3$ . Отсюда оценки риска могут быть пересчитаны

$$\underline{P}_S(X \geq Y|1) = 0, \quad \bar{P}_S(X \geq Y|1) = 0.28.$$

Можно увидеть, что более точные результаты получены после опроса новых экспертов.

Рассмотрим случай отсутствия сведений о независимости. Из (10.28) и (10.29) следует, что при  $N = 100$ ,  $M = 100$ ,  $s = 1$  границы риска имеют вид:

$$\underline{P}_U(X \geq Y|1) = 0, \quad \bar{P}_U(X \geq Y|1) = 0.35.$$

Если  $N = 6$ ,  $M = 5$ ,  $s = 1$ , то

$$\underline{P}_U(X \geq Y|1) = 0, \quad \bar{P}_U(X \geq Y|1) = 0.45.$$

### 10.6.3. Точечные оценки

Предположим, что получены точечные оценки расходов и доходов. Пусть  $x_1, \dots, x_N$  и  $y_1, \dots, y_M$  – оценки  $X$  и  $Y$  соответственно. Предположим без потери общности, что  $x_1 < \dots < x_N$

и  $y_1 < \dots < y_M$ . Рассматривая приведенные оценки как интервалы  $A_i = [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $D_i = [y_i - \varepsilon, y_i + \varepsilon]$ ,  $i = 1, \dots, M$ ,  $\varepsilon \geq 0$ , получаем такие интервальные оценки, что  $a_i = 1$  и  $d_j = 1$  для всех  $i = 1, \dots, N$  и  $j = 1, \dots, M$ . Тогда

$$\inf A_i = x_i - \varepsilon, \quad \sup A_i = x_i + \varepsilon,$$

$$\inf D_i = y_i - \varepsilon, \quad \sup D_i = y_i + \varepsilon$$

и выражения (10.26)–(10.27) принимают вид:

$$\begin{aligned} \underline{P}_S(X \geq Y|s) &= \frac{1}{(M+s)(N+s)} \times \\ &\times \left( MN - \sum_{i=1}^M \left( \sum_{j: x_j - \varepsilon \leq y_i + \varepsilon} 1 \right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{P}_S(X \geq Y|s) &= 1 - \frac{1}{(M+s)(N+s)} \times \\ &\times \left( MN - \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j: y_j - \varepsilon \leq x_i + \varepsilon} 1 \right) \right). \end{aligned}$$

Если обозначить число точек  $x_j$ , удовлетворяющих условию  $x_j \leq y_i$ , как  $n(i)$ , а число точек  $y_j$ , удовлетворяющих условию  $y_j \leq x_i$ , как  $m(i)$ , то при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем:

$$\begin{aligned} \underline{P}_S(X \geq Y|s) &= \\ &= \frac{1}{(M+s)(N+s)} \left( MN - \sum_{i=1}^M n(i) \right), \end{aligned} \quad (10.30)$$

$$\begin{aligned} \overline{P}_S(X \geq Y|s) &= \\ &= 1 - \frac{1}{(M+s)(N+s)} \left( MN - \sum_{i=1}^N m(i) \right). \end{aligned} \quad (10.31)$$

При отсутствии сведений о независимости аналогичные выражения имеют вид:

$$\begin{aligned} \underline{P}_U(X \geq Y|s) &= \\ &= \max_{i=1, \dots, m} \max \left\{ 0, \frac{i}{M+s} - \frac{s+n(i)}{N+s} \right\}, \end{aligned} \quad (10.32)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_U(X \geq Y|s) &= \\ &= 1 - \max_{i=1, \dots, n} \max \left\{ 0, \frac{i}{N+s} - \frac{s+m(i)}{M+s} \right\}. \end{aligned} \quad (10.33)$$

**Пример 10.11.** Предположим, что точечные оценки расходов и доходов имеют экспоненциальное распределение вероятностей с математическими ожиданиями  $T_1 = 2$  и  $T_2 = 9$  соответственно. Используя известное выражение для определения риска в этом случае, запишем:

$$P_S(X \geq Y) = \frac{T_1}{T_1 + T_2} = \frac{2}{2 + 9} = 0.182.$$

Для иллюстрации предлагаемого подхода сгенерируем, в соответствии с датчиком случайных чисел, имеющих экспоненциальное распределение,  $N = 6$  точечных оценок расходов и  $M = 5$  точечных оценок доходов. Результаты генерации для расходов:

$$0.42, 1.32, 6.33, 3.398, 2.1, 2.3,$$

для доходов:

$$2.57, 7.04, 11.4, 17.7, 3.97.$$

Предположим теперь, что распределения вероятностей расходов и доходов не известны и имеется только выборочная информация (сгенерированные числа). Из (10.30) и (10.31) следует, что

$$\begin{aligned} \underline{P}_S(X \geq Y|s) &= \frac{3}{(5+s)(6+s)}, \\ \bar{P}_S(X \geq Y|s) &= 1 - \frac{27}{(5+s)(6+s)}. \end{aligned}$$

Если  $s = 0$ , то  $\underline{P}_S(X \geq Y|0) = \bar{P}_S(X \geq Y|s) = 0.1$ . Оценка риска является явно заниженной по сравнению с “истинным” значением  $P_S(X \geq Y) = 0.182$ . Если принять  $s = 1$ , то  $\underline{P}_S(X \geq Y|1) = 0.071$  и  $\bar{P}_S(X \geq Y|1) = 0.357$ . Отсюда следует, что

$$\underline{P}_S(X \geq Y|1) \leq P_S(X \geq Y) \leq \bar{P}_S(X \geq Y|1).$$

Несмотря на размытость полученных границ оценки риска при  $s = 1$ , они являются осторожными границами для “истинного” значения риска 0.182.

Интересно отметить, что осторожные границы появляются в этом примере уже при  $s = 0.3$ . В этом случае

$$\underline{P}_S(X \geq Y|0.3) = 0.09, \quad \bar{P}_S(X \geq Y|0.3) = 0.191.$$

К сожалению, в настоящее время нет процедуры определения минимально возможного значения  $s$  в общем случае для получения наиболее точных осторожных границ.

## 10.7. Заключение

NPV – достаточно распространенная характеристика риска инвестирования проекта. Поэтому методы ее анализа, определения и эффективного вычисления при различных исходных данных являются важной задачей. Один из таких методов, использующий интервальные экспертные оценки параметров NPV, рассмотрен выше. Несмотря на детальное описание метода, остается ряд открытых вопросов, к которым можно отнести следующие:

- 1) *Вычисление.* Из описания процедур вычисления NPV видно, что они требуют перебора всех комбинаций индексов в множестве  $\mathcal{J}$ . Это одно из наиболее сложных с вычислительной точки зрения мест. Однако количество экспертных оценок в реальных задачах обычно достаточно небольшое, и расчеты не занимают много времени. Более того, существуют эффективные рекурсивные процедуры, которые значительно упрощают реализацию перебора всех элементов множества  $\mathcal{J}$ .
- 2) *Интервальные характеристики NPV.* Как видно из приведенных результатов расчетов, полученные вероятности и ожидаемые значения являются интервальными. Как в этом случае принимать решение об инвестировании? Прежде всего необходимо отметить, что возможная большая размытость результатов отражает существенную неполноту исходных данных или их противоречивость. Существует большое число методов выбора точного значения интервала. Наиболее обоснованным методом является использование коэффициента осторожности [138], или параметра пессимизма  $\eta$ . Например, если были получены нижняя  $\underline{P}(\text{NPV} > 0)$  и верхняя  $\overline{P}(\text{NPV} > 0)$  границы вероятности, то точное значение вероятности вычисляется как

$$\eta \underline{P}(\text{NPV} > 0) + (1 - \eta) \overline{P}(\text{NPV} > 0).$$

Когда анализируется множество проектов, то для их сравнения можно использовать критерии принятия ре-

шений при неполной информации (см. раздел 8.2), например критерий Уолли, Г-максимакса и т.д. [83, 84].

- 3) *Независимость*. Три типа независимости были рассмотрены выше. В соответствии с этим возникает вопрос, какой тип следует использовать. На самом деле ответить достаточно сложно. Можно сказать, что неизвестное взаимодействие – наиболее консервативный подход, дающий наиболее нечеткие результаты, которые могут привести к невозможности принятия решения. Строгая независимость дает наиболее точные результаты расчетов, которые могут быть достаточно рискованными. Независимость случайных множеств занимает промежуточное положение между неизвестным взаимодействием и строгой независимостью. Однако обоснование ее использования на практике может натолкнуться на значительные трудности.
- 4) *Точечные данные*. Иногда эксперты предоставляют точечные оценки вместо интервальных. В этом случае предлагаемые подходы могут применяться при условии, что точки являются вырожденным случаем интервалов. Очевидно, что вычислительная процедура получается более простой, так как отпадает необходимость поиска минимального или максимального значений<sup>16</sup> NPV в интервалах, соответствующих каждому вектору из множества  $\mathcal{J}$ . Если не использовать обобщенную модель Дирихле, результирующие вероятности получаются точными при условии использования строгой независимости или независимости случайных множеств. Однако этот факт можно рассматривать как недостаток, так как, принимая точечные значения, мы полностью доверяем экспертам, оценки которых отражают их чрезвычайно завышенную уверенность [26]. Для устранения этого недостатка целесообразно использовать обобщенную модель Дирихле. Эта модель добавляет интерва-

---

<sup>16</sup>Исключение составляет использование обобщенной модели Дирихле для обработки точечных оценок.



лы  $[\inf V_k, \sup V_k]$ ,  $[\inf r, \sup r]$ , которые можно рассматривать как оценки чрезвычайно осторожных экспертов [26]. Дополнительные оценки “компенсируют” точные данные и позволяют принимать более осторожные решения. Пусть получены точечные наблюдения для  $V_1$ :  $\{-3, -3, -3, 1\}$ , для  $V_2$ :  $\{4, 3\}$ , для  $r$ :  $\{0.1, 0.2\}$ . Предполагая  $V_0 = 0$  и представляя каждую точку как вырожденный интервал, получаем совпадающие нижнюю и верхнюю границы вероятности события  $NPV > 0$  при условии строгой независимости или независимости случайных множеств

$$\underline{P}_{R,S}(NPV > 0) = \bar{P}_{R,S}(NPV > 0) = 0.625.$$

Эти результаты ненадежны и достаточно рискованны, так как исходная информация очень ограничена. Однако при использовании обобщенной модели Дирихле с параметром  $s = 1$  и  $\inf V_k = -10$ ,  $\sup V_k = 10$ ,  $\inf r = 0$ ,  $\sup r = 1$  получим

$$\underline{P}_{R,S}(NPV > 0) = 0.27, \quad \bar{P}_{R,S}(NPV > 0) = 0.87.$$

Этот короткий числовой пример иллюстрирует тот факт, что использование обобщенной модели Дирихле дает более реалистичные результаты.

- 5) *Интервальные распределения вероятностей параметров.* Иногда известны нижняя и верхняя границы распределений вероятностей параметров  $NPV$ , т.е. р-блоки [13]. Приближенное представление этой модели неопределенности при помощи случайных множеств рассматривалось в разделе 9.7. Следовательно, случай интервальных распределений может рассматриваться при помощи представленных выше подходов. При этом обобщенная модель Дирихле теряет свои преимущества, так как число интервалов зависит от степени приближения и может выбираться достаточно большим.

## Послесловие

Быть опровергнутым – этого опасаться нечего; опасаться следует другого – быть непонятым.

*Иммануил Кант*

В книге был рассмотрен целый ряд подходов и математических моделей описания неполноты исходной информации о состояниях природы и предложены методы и эффективные алгоритмы принятия решений при различных условиях и различных исходных данных.

Для иллюстрации предлагаемых моделей было приведено большое число примеров, которые нередко имеют практическое значение. В то же время ряд примеров носят упрощенный характер в целях уменьшения объема их расчетной части.

В книге не ставилась цель решить все проблемы, возникающие на основе рассмотренных моделей неполноты информации. Поэтому вне рамок книги остался ряд важных вопросов и задач. Прежде всего это задачи многокритериального принятия решений. Во многих задачах лицо, принимающее решение, сталкивается с проблемой выбора оптимального решения при наличии нескольких конфликтующих критериев. В литературе можно найти большое количество методов решения таких задач, но большинство методов используют точную исходную информацию для решения задач многокритериальной оптимизации, что существенно ограничивает их применение. В качестве примера можно привести известный метод анализа иерархий Саати, в соответствии с которым эксперты или лица, принимающие решение, должны предоставить оценки парных сравнений для возможно большого количества альтернатив и критериев. Во многих ситуациях это сделать практически невозможно. Обычно эксперты предоставляют ненадежную, неточную и неполную информацию, которую необходимо использовать, учитывая ее ненадежность, неточность

и неполноту. Разработка методов и эффективных алгоритмов решения задач многокритериального принятия решений при неполной информации – это задачи, которые необходимо решать в будущем.

Другой важной и актуальной проблемой является поиск эффективных и универсальных алгоритмов и вычислительных процедур для принципа продолжения в теории интервальных средних. Даже из достаточно простых задач принятия решений было видно, что решение оптимизационных задач в большинстве случаев наталкивается на значительные трудности. В ряде случаев удалось найти эффективные алгоритмы решения, и они рассмотрены в книге. Тем не менее эта проблема остается актуальной, особенно когда имеет место независимость явлений, и требует поиска своего решения в дальнейшем.

Перечисленные здесь проблемы составляют только малую часть тех задач, которые возникают после прочтения книги и требуют дополнительных исследований.

В заключение хотелось бы выразить надежду, что книга была интересна читателю, что она явилась определенным толчком для продолжения исследований в данной области, и автор будет рад услышать замечания по ее содержанию.

## Литература

1. *Anscombe F.J., Aumann R.J.* A definition of subjective probability // *Annals of Mathematical Statistics*. 1963. Vol. 34. P. 199–205.
2. *Augustin T.* On decision making under ambiguous prior and sampling information // *Imprecise Probabilities and Their Applications*. Proc. of the 2nd Int. Symposium ISIPTA'01 / Ed. by G. de Cooman, T.L. Fine, T. Seidenfeld. Ithaca, USA: Shaker Publishing, 2001. P. 9–16.
3. *Augustin T.* Expected utility within a generalized concept of probability - a comprehensive framework for decision making under ambiguity // *Statistical Papers*. 2002. Vol. 43. P. 5–22.
4. *Aven T.* *Foundations of Risk Analysis: A Knowledge and Decision-Oriented Perspective*. England: Wiley, 2003.
5. *Baudrit C., Dubois D.* Practical representations of incomplete probabilistic knowledge // *Computational Statistics and Data Analysis*. 2006. Vol. 51. P. 86–108.
6. *Berger J.O.* *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. New York: Springer-Verlag, 1985.
7. *Bernard J.-M.* Non-parametric inference about an unknown mean using the imprecise Dirichlet model // *Imprecise Probabilities and Their Applications*. Proc. of the 2nd Int. Symposium ISIPTA'01 / Ed. by G. de Cooman, T.L. Fine, T. Seidenfeld. Ithaca, USA: Shaker Publishing, 2001. P. 40–50.
8. *Bernard J.-M.* Implicative analysis for multivariate binary data using an imprecise Dirichlet model // *Journal of Statistical Planning and Inference*. 2002. Vol. 105, N 1. P. 83–104.
9. *Bernard J.-M.* An introduction to the imprecise Dirichlet model for multinomial data // *International Journal of Approximate Reasoning*. 2005. Vol. 39, N 2–5. P. 123–150.
10. *Bernardo J.M., Smith A.F.M.* *Bayesian Theory*. Chichester: Wiley, 1994.
11. *Carnap R.* *Logical foundations of probability*. Chicago: Chicago University Press, 1950. 607 p.

12. *Chateauneuf A., Jaffray J.Y.* Some characterizations of lower probabilities and other monotone capacities through the use of Moebius inversion // *Mathematical Social Sciences*. 1989. Vol. 17. P. 263–283.
13. Constructing probability boxes and Dempster-Shafer structures: Report SAND2002-4015 / S. Ferson, V. Kreinovich, L. Ginzburg et al.: Sandia National Laboratories, 2003.
14. *Cook R.M.* Experts in Uncertainty. Opinion and Subjective Probability in Science. New York: Oxford University Press, 1991.
15. *Couso I., Moral S., Walley P.* Examples of independence for imprecise probabilities // *ISIPTA '99 - Proceedings of the First International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications* / Ed. by G. de Cooman, F.G. Cozman, S. Moral, P. Walley. Zwijnaarde, Belgium: 1999. P. 121–130.
16. *Cozman F.G.* Calculation of posterior bounds given convex sets of prior probability measures and likelihood functions // *Journal of Computational and Graphical Statistics*. 1999. Vol. 8, N 4. P. 824–838.
17. *Cozman F.G., Chrisman L.* Learning convex sets of probability from data: Tech. rep. cmu-ri-tr-97-25: Robotics Institute, Carnegie Mellon University, 1997.
18. *De Cooman G.* The formal analogy between possibility and probability theory // *Foundations and Applications of Possibility Theory - Proceedings of FAPT '95* / Ed. by G. de Cooman, D. Ruan, E.E. Kerre. Ghent, Belgium: International Workshop, 1995. P. 71–87.
19. *De Cooman G.* Possibilistic previsions // *Proceedings of IP-MU'98*. — Paris: Editions EDK, 1998. P. 2–9.
20. *De Cooman G.* Precision–imprecision equivalence in a broad class of imprecise hierarchical uncertainty models // *Journal of Statistical Planning and Inference*. 2002. Vol. 105, N 1. P. 175–198.
21. *De Cooman G., Aeyels D.* Supremum preserving upper probabilities // *Information Sciences*. 1999. Vol. 118. P. 173–212.
22. *De Cooman G., Walley P.* A possibilistic hierarchical model for behaviour under uncertainty // *Theory and Decision*. 2002. Vol. 52, N 4. P. 327–374.
23. *DeGroot M.* Optimal Statistical Decisions. New York: McGraw-Hill, 1970.
24. *Dempster A.P.* Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping // *Annales of Mathematical Statistics*. 1967.

Vol. 38. P. 325–339.

25. *Destercke S., Dubois D.* A unified view of some representations of imprecise probabilities // Int. Conf. on Soft Methods in Probability and Statistics. Advances in Soft Computing. Bristol: Springer, 2006. P. 249–257.
26. *Dubois D., Kalfsbeek H.* Elicitation, assessment and pooling of expert judgement using possibility theory // Proc. of the 8th Int. Congress of Cybernetics and Systems / Ed. by C.N. Manikopoulos. Newark, NJ: New Jersey Institute of Technology Press, 1990. P. 360–367.
27. *Dubois D., Prade H.* Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty. Plenum Press, New York, 1988.
28. *Dubois D., Prade H.* When upper probabilities are possibility measures // Fuzzy Sets and Systems. 1992. Vol. 49. P. 65–74.
29. *Dubois D., Prade H.* Fuzzy sets and probability: Misunderstanding, bridges and gaps // Proceedings of the Second IEEE Conference on Fuzzy Systems. 1993. P. 1059–1068.
30. *Dubois D., Prade H.* Possibility theory and data fusion in poorly informed environments // Control Engineering Practice. 1994. Vol. 2, N 5. P. 811–823.
31. *Ellsberg D.* Risk, ambiguity, and the savage axioms // Quarterly Journal of Economics. 1961. Vol. LXXV. P. 643–669.
32. *Ferson S.* Bayesian methods in risk assessment: Tech. rep.: RAMAS, 2006.
33. *Fetz Th., Oberguggenberger M.* Propagation of uncertainty through multivariate functions in the framework of sets of probability measures // Reliability Engineering and System Safety. 2004. Vol. 85, N 1–3. P. 73–87.
34. *Fine T.L.* Lower probability models for uncertainty and non-deterministic processes // Journal of Statistical Planning and Inference. 1988. Vol. 20. P. 389–411.
35. *Fox C.R., Tversky A.* Ambiguity aversion and comparative ignorance // Quarterly Journal of Economics. 1995. Vol. CX, N 3. P. 585–603.
36. *Frechet M.* Generalizations du theoreme des probabilites totales // Fundamenta Mathematica. 1935. Vol. 25. P. 379–387.
37. *Gärdenfors P., Sahlin N.-E.* Unreliable probabilities, risk taking, and decision making // Synthese. 1982. Vol. 53. P. 361–386.

38. *Genest C., Zidek J.* Combining probability distributions: A critique and an annotated bibliography // *Statistical Science*. 1986. Vol. 1. P. 114–148.
39. *Gilbert L., De Cooman G., Kerre E.E.* Practical implementation of possibilistic probability mass functions // *Proceedings of Fifth Workshop on Uncertainty Processing (WUPES 2000)*. Jindřichov Hradec, Czech Republic: 2000. P. 90–101.
40. *Gilboa I., Schmeidler D.* Maxmin expected utility with non-unique prior // *Journal of Mathematical Economics*. 1989. Vol. 18, N 2. P. 141–153.
41. *Giron F.J., Rios S.* Quasi-bayesian behaviour: A more realistic approach to decision making? // *Bayesian Statistics / Ed. by J.M. Bernardo, J.H. DeGroot, D.V. Lindley, A.F.M. Smith*. Valencia, Spain: University Press, 1980. P. 17–38.
42. *Goldstein M.* The prevision of a prevision // *J. Amer. Statist. Soc.* 1983. Vol. 87. P. 817–819.
43. *Good I.J.* Some history of the hierarchical Bayesian methodology // *Bayesian Statistics / Ed. by J.M. Bernardo, M.H. DeGroot, D.V. Lindley, A.F.M. Smith*. Valencia: Valencia University Press, 1980. P. 489–519.
44. *Goodman I. R., Nguyen H. T.* Probability updating using second order probabilities and conditional event algebra // *Information Sciences*. 1999. Vol. 121, N 3–4. P. 295–347.
45. *Gustafsson J., Salo A.* Valuing risky projects with contingent portfolio programming: Tech. Rep. Systems Analysis Laboratory Research Reports E18: Helsinki University of Technology, 2005.
46. *Halpern J.Y.* Reasoning About Uncertainty. Massachusetts: The MIT Press, 2003. 483 p.
47. *Halpern J.Y., Fagin R.* Two views of belief: Belief as generalized probability and belief as evidence // *Artificial Intelligence*. 1992. Vol. 54. P. 275–317.
48. *Hodges J.L., Lehmann E.* The use of previous experience in reaching statistical decisions // *Ann. Math. Stat.* 1952. Vol. 23, N 3. P. 396–407.
49. *Inagaki T.* Interdependence between safety-control policy and multiple-sensor schemes via Dempster-Shafer theory // *IEEE Transactions on Reliability*. 1991. Vol. 40, N 2. P. 182–188.
50. *Jeffreys H.* Theory of probability. Oxford: Oxford Press, 1939. 470 p.

51. *Kaneman D., Tversky A.* Prospect theory: an analysis of decision under risk // *Econometrica*. 1979. Vol. 47, N 2. P. 263–291.
52. *Keynes J.M.* A treatise on probability. London: Macmillan, 1921. 459 p.
53. *Kikuti D., Cozman F.G., de Campos C.P.* Partially ordered preferences in decision trees: Computing strategies with imprecision in probabilities // *Multidisciplinary IJCAI-05 Workshop on Advances in Preference Handling* / Ed. by R. Brafman, U. Junker. Edinburgh, Scotland: 2005. P. 118–123.
54. *Klir G.J., Wierman M.J.* Uncertainty-Based Information: Elements of Generalized Information Theory. Heidelberg: Physica-Verlag, 1998.
55. *Kozine I.O., Utkin L.V.* Constructing coherent interval statistical models from unreliable judgements // *Proceedings of the European Conference on Safety and Reliability ESREL2001* / Ed. by E. Zio, M. Demichela, N. Piccini. Torino, Italy: 2001. P. 173–180.
56. *Kozine I.O., Utkin L.V.* Processing unreliable judgements with an imprecise hierarchical model // *Risk Decision and Policy*. 2002. Vol. 7, N 3. P. 325–339.
57. *Kozine I.O., Utkin L.V.* Variety of judgements admitted in imprecise statistical reasoning // *Proc. of the 3-rd Safety and Reliability Int. Conference* / Wydawnictwo Instytutu Technicznego Wojsk Lotniczych, Warszawa. Vol. 2. Gdynia, Poland: ROK Wydania III, Series: Monographs, nr. 3, 2003. P. 139–146.
58. *Kozine I.O., Utkin L.V.* An approach to combining unreliable pieces of evidence and their propagation in a system response analysis // *Reliability Engineering and System Safety*. 2004. Vol. 85, N 1–3. P. 103–112.
59. *Kozine I.O., Utkin L.V.* Constructing imprecise probability distributions // *International Journal of General Systems*. 2005. Vol. 34. P. 401–408.
60. *Kriegler E., Held H.* Utilizing belief functions for the estimation of future climate change // *International Journal of Approximate Reasoning*. 2005. Vol. 39. P. 185–209.
61. *Kuznetsov V. P.* Auxiliary problems of statistical data processing: Interval approach // *Proceedings of the Int. Workshop on Applications of Interval Computations*. El Paso, Texas: 1995. P. 123–129.
62. *Kyburg H.E.* Bayesian and non-Bayesian evidential updating //



- Artificial Intelligence. 1987. Vol. 31. P. 271–293.
63. *Levi I.* On indeterminate probabilities // Journal of Philosophy. 1974. Vol. 71. P. 391–418.
  64. *Lindley D.V.* Subjectivist view of decision making // European Journal of Operational Research. 1982. Vol. 9, N 3. P. 213.
  65. *Nau R. F.* Indeterminate probabilities on finite sets // The Annals of Statistics. 1992. Vol. 20. P. 1737–1767.
  66. *Nguyen H. T., Walker E.A.* On decision making using belief functions // Advances in the Dempster-Shafer theory of evidence / Ed. by R.Y. Yager, M. Fedrizzi, J. Kacprzyk. New York: Wiley, 1994. P. 311–330.
  67. Project Risk Management: Guidelines Managing Risk in Large Projects and Complex Procurements / D.F. Cooper, S. Grey, G. Raymond, P. Walker. England: John Wiley and Sons, 2005.
  68. *Quaeghebeur E., De Cooman G.* Game-theoretic learning using the imprecise Dirichlet model // Proc. of the 3rd Int. Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications, ISIP-TA'03 / Ed. by J.-M. Bernard, T. Seidenfeld, M. Zaffalon. Lugano, Switzerland: Carleton Scientific, 2003. P. 450–464.
  69. *Quaeghebeur E., De Cooman G.* Imprecise probability models for inference in exponential families // Proc. of the 4rd Int. Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications, ISIP-TA'05 / Ed. by J.-M. Bernard, T. Seidenfeld, M. Zaffalon; Carnegie Mellon University. Pittsburgh, Pennsylvania: 2005.
  70. *Ramsey F.P.* Truth and probability // The foundations of mathematics and other logical essays. London: Routledge and Kegan Paul, 1931. P. 156–198.
  71. *Robert C.P.* The Bayesian Choice. New York: Springer, 1994.
  72. *Savage L.J.* The Foundation of Statistics. New York: Dover Publications, 1972.
  73. *Schubert J.* On  $\rho$  in a decision-theoretic apparatus of Dempster-Shafer theory // International Journal of Approximate Reasoning. 1995. Vol. 13. P. 185–200.
  74. *Sentz K., Ferson S.* Combination of evidence in Dempster-Shafer theory: Report SAND2002-0835: Sandia National Laboratories, 2002.
  75. *Shafer G.* A Mathematical Theory of Evidence. Princeton University Press, 1976.
  76. *Singpurwalla N.D.* Warranty contracts and equilibrium probabil-

- ities // *Statistical Science in the Courtroom* / Ed. by J.L. Gastwirth. US: Springer-Verlag, 2000. P. 363–377.
77. *Smets P.* What is dempster-shafer's model? // *Advances in the Dempster-Shafer Theory of Evidence* / Ed. by R.R. Yager, M. Fedrizzi, J. Kacprzyk. Wiley, 1994. P. 5–34.
  78. *Smets P.* Belief functions on real numbers // *International Journal of Approximate Reasoning*. 2005. Vol. 40. P. 181–223.
  79. *Smithson M., Bartos T., Takemura K.* Human judgment under sample space ignorance // *ISIPTA '99 - Proceedings of the First Int. Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications* / Ed. by G. de Cooman, F.G. Cozman, S. Moral, P. Walley. Zwijnaarde, Belgium: 1999. P. 324–332.
  80. *Strat T.M.* Decision analysis using belief functions // *International Journal of Approximate Reasoning*. 1990. Vol. 4, N 5. P. 391–418.
  81. *Syversveen A.R.* Noninformative Bayesian priors. Interpretation and problems with construction and applications: Preprint Statistics 3. Trondheim: Department of Mathematical Sciences, NTNU, 1998.
  82. *Tonon F., Bernardini A., Mammino A.* Determination of parameters range in rock engineering by means of random set theory // *Reliability Engineering and System Safety*. 2000. Vol. 70. P. 241–261.
  83. *Troffaes M.C.M.* Decisions making with imprecise probabilities: a short review // *The SIPTA Newsletter* / Ed. by F.G. Cozman. Manno, Switzerland: Society for Imprecise Probability Theory and Applications, 2004. Dec. Vol. 2. P. 4–7. <http://www.sipta.org>.
  84. *Troffaes M.C.M.* Decision making under uncertainty using imprecise probabilities // *International Journal of Approximate Reasoning*. 2007. Vol. 45, N 1. P. 17–29.
  85. *Troffaes M.C.M., De Cooman G.* Extension of coherent lower previsions to unbounded random variables // *Proceedings of the Ninth Int. Conference IPMU 2002 (Information Processing and Management)*. Annecy, France: ESIA - University of Savoie, 2002. P. 735–742.
  86. *Troffaes M.C.M., De Cooman G.* Lower previsions for unbounded random variables // *Soft Methods in Probability, Statistics and Data Analysis* / Ed. by P. Grzegorzewski, O. Hryniewicz, M.A. Gil. Heidelberg, New York: Phisica-Verlag, 2002. P. 146–

87. *Troffaes M.C.M., De Cooman G.* Uncertainty and conflict: A behavioural approach to the aggregation of expert opinions // Proc. of the 6th Workshop on Uncertainty Processing / Ed. by J. Vejnarova. VSE - Oeconomica Publishers, 2003. P. 263–277.
88. Uncertainty in risk analysis: Towards a general second-order approach combining interval, probabilistic, and fuzzy techniques / S. Ferson, L. Ginzburg, V. Kreinovich et al. // Proceedings of FUZZ-IEEE'2002. Vol. 2. Hawaii, 2002. P. 1342–1347.
89. Using fuzzy set theory to analyse investments and select portfolios of tangible investments in uncertain environments / A. Terreno, J. de Andres, G. Barbera, T. Lorenzana // International Journal of uncertainty, fuzziness and knowledge-based systems. 2003. Vol. 11, N 3. P. 263–281.
90. *Utkin L.V.* Assessment of risk under incomplete information // Proc. of Int. Scientific School "Modelling and Analysis of Safety, Risk and Quality in Complex Systems". Saint Petersburg, Russia: 2001. P. 319–322.
91. *Utkin L.V.* Avoiding the conflicting risk assessments // Proceedings of Int. Scientific School "Modelling and Analysis of Safety, Risk and Quality in Complex Systems". Saint Petersburg, Russia: 2002. P. 58–62.
92. *Utkin L.V.* A hierarchical uncertainty model under essentially incomplete information // Soft Methods in Probability, Statistics and Data Analysis / Ed. by P. Grzegorzewski, O. Hryniewicz, M.A. Gil. Heidelberg, New York: Physica-Verlag, 2002. P. 156–163.
93. *Utkin L.V.* Imprecise calculation with the qualitative information about probability distributions // Soft Methods in Probability, Statistics and Data Analysis / Ed. by P. Grzegorzewski, O. Hryniewicz, M.A. Gil. Heidelberg, New York: Physica-Verlag, 2002. P. 164–169.
94. *Utkin L.V.* Involving the unimodality condition of discrete probability distributions into imprecise calculations // Proceedings of the Int. Conf. on Soft Computing and Measurements (SCM'2002). Vol. 1. St. Petersburg, Russia: Gidrometeoizdat, 2002. P. 53–56.
95. *Utkin L.V.* Some structural properties of fuzzy reliability models // Proceedings of the Int. Conf. on Soft Computing and Measurements (SCM'2002). Vol. 1. St. Petersburg, Russia: Gidrom-

- eteoizdat, 2002. P. 197–200.
96. *Utkin L.V.* Imprecise reliability of cold standby systems // International Journal of Quality and Reliability Management. 2003. Vol. 20, N 6. P. 722–739.
  97. *Utkin L.V.* Imprecise second-order hierarchical uncertainty model // International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. 2003. Vol. 11, N 3. P. 301–317.
  98. *Utkin L.V.* Reliability of monotone systems by partially defined interval probabilities // Proc. of the 3-rd Safety and Reliability Int. Conference. Vol. 2. Gdynia, Poland: ROK Wydania III, Series: Monographs, N 3, 2003. P. 187–194.
  99. *Utkin L.V.* A second-order uncertainty model for the calculation of the interval system reliability // Reliability Engineering and System Safety. 2003. Vol. 79, N 3. P. 341–351.
  100. *Utkin L.V.* A second-order uncertainty model of independent random variables: An example of the stress-strength reliability // Proc. of the 3rd Int. Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications, ISIPTA'03 / Ed. by J.-M. Bernard, T. Seidenfeld, M. Zaffalon. Lugano, Switzerland: Carleton Scientific, 2003. P. 530–544.
  101. *Utkin L.V.* Belief functions and the imprecise Dirichlet model // Proc. of the Int. Conf. on Fuzzy Sets and Soft Computing in Economics and Finance / Ed. by I. Batyrshin, J. Kacprzyk, L. Sheremetov. Vol. 1. St.Petersburg, Russia: Mexican Petroleum Institute, 2004. P. 178–185.
  102. *Utkin L.V.* Interval reliability of typical systems with partially known probabilities // European Journal of Operational Research. 2004. Vol. 153, N 3. P. 790–802.
  103. *Utkin L.V.* A new efficient algorithm for computing the imprecise reliability of monotone systems // Reliability Engineering and System Safety. 2004. Vol. 86, N 3. P. 179–190.
  104. *Utkin L.V.* Probabilities of judgments provided by unknown experts by using the imprecise Dirichlet model // Risk, Decision and Policy. 2004. Vol. 9, N 4. P. 391 – 400.
  105. *Utkin L.V.* Reliability models of m-out-of-n systems under incomplete information // Computers and Operations Research. 2004. Vol. 31, N 10. P. 1681–1702.
  106. *Utkin L.V.* An uncertainty model of the stress-strength reliability with imprecise parameters of probability distributions // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (Applied

- Mathematics and Mechanics). 2004. Vol. 84, N 10–11. P. 688–699.
107. *Utkin L.V.* Comments on the paper "A behavioural model for vague probability assessments" by Gert de Cooman // *Fuzzy Sets and Systems*. 2005. Vol. 154, N 3. P. 367–369.
  108. *Utkin L.V.* Extensions of belief functions and possibility distributions by using the imprecise Dirichlet model // *Fuzzy Sets and Systems*. 2005. Vol. 154, N 3. P. 413–431.
  109. *Utkin L.V.* A hierarchical model of reliability by imprecise parameters of lifetime distributions // *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*. 2005. Vol. 12, N 2. P. 167–187.
  110. *Utkin L.V.* Imprecise second-order uncertainty model for a system of independent random variables // *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*. 2005. Vol. 13, N 2. P. 177–194.
  111. *Utkin L.V.* Cautious analysis of project risks by interval-valued initial data // *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*. 2006. Vol. 14, N 6. P. 663–685.
  112. *Utkin L.V.* A method for processing the unreliable expert judgments about parameters of probability distribution // *European Journal of Operational Research*. 2006. Vol. 175, N 1. P. 385–398.
  113. *Utkin L.V.* Imprecise inference models in risk analysis // *Fuzzy Sets, Probability, and Statistics - Gaps and Bridges* / Ed. by D. Dubois, E.P. Klement, R. Mesiar. Linz, Austria: Johannes Kepler University, 2007. P. 116–119.
  114. *Utkin L.V.* Risk analysis under partial prior information and non-monotone utility functions // *International Journal of Information Technology and Decision Making*. 2007, to appear.
  115. *Utkin L.V.* Second-order uncertainty calculations by using the imprecise Dirichlet model // *Intelligent Data Analysis*. 2007. Vol. 11, N 3. P. 225 – 244.
  116. *Utkin L.V., Augustin T.* Risk analysis on the basis of partial information about quantiles // *Modelling and Analysis of Safety and Risk in Complex Systems*. Proceedings of the Third Int. Scientific School MA SR -2003. Institute of Problems of Mechanical Engineering of Russian Academy of Science (IPME RAS), St. Petersburg, Russia: SPb GUAP, 2003. P. 172–178.
  117. *Utkin L.V., Augustin T.* Fuzzy decision making using the imprecise Dirichlet model // *Proc. of the Int. Conf. on Fuzzy Sets and Soft Computing in Economics and Finance* / Ed. by I. Batyr-

- shin, J. Kacprzyk, L. Sheremetov. Vol. 1. St.Petersburg, Russia: Mexican Petroleum Institute, 2004. P. 186–193.
118. *Utkin L.V., Augustin Th.* Decision making under imperfect measurement using the imprecise Dirichlet model // Proc. of the 4th Int. Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications, ISIPTA'05 / Ed. by T. Seidenfeld F.G. Cozman, R. Nau; Carnegie Mellon University. Pittsburgh, USA: SIPTA, 2005. P. 359–368.
  119. *Utkin L.V., Augustin Th.* Efficient algorithms for decision making under partial prior information and general ambiguity attitudes // Proc. of the 4th Int. Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications, ISIPTA'05 / Ed. by T. Seidenfeld F.G. Cozman, R. Nau; Carnegie Mellon University. Pittsburgh, USA: SIPTA, 2005. P. 349–358.
  120. *Utkin L.V., Augustin Th.* Decision making under incomplete data using the imprecise Dirichlet model // International Journal of Approximate Reasoning. 2007. Vol. 44, N 3. P. 322–338.
  121. *Utkin L.V., Coolen F.P.A.* Imprecise reliability: An introductory overview // Computational Intelligence in Reliability Engineering. New Metaheuristics, Neural and Fuzzy Techniques in Reliability / Ed. by Gregory Levitin. Springer, 2007. Vol. 2 of Studies in Computational Intelligence. P. 261–306.
  122. *Utkin L.V., Gurov S.V.* Imprecise reliability models for the general lifetime distribution classes // ISIPTA '99 - Proceedings of the First Int. Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications / Ed. by G. de Cooman, F.G. Cozman, S. Moral, P. Walley. Zwijnaarde, Belgium: 1999. P. 333–342.
  123. *Utkin L.V., Gurov S.V.* Generalized ageing lifetime distribution classes // Foresight and Precaution. Proc. of ESREL 2000 / Ed. by M.P. Cottam, D.W.Harvey, R.P. Pape, J. Tait. Rotterdam: Balkema, 2000. May. P. 1539–1545.
  124. *Utkin L.V., Gurov S.V.* New reliability models based on imprecise probabilities // Advanced Signal Processing Technology / Ed. by C. Hsu. World Scientific, 2001. P. 110–139.
  125. *Utkin L.V., Gurov S.V.* Imprecise reliability for the new lifetime distribution classes // Journal of Statistical Planning and Inference. 2002. Vol. 105, N 1. P. 215–232.
  126. *Utkin L.V., Kozine I.O.* Conditional previsions in imprecise reliability // Intelligent Techniques and Soft Computing in Nuclear Science and Engineering / Ed. by D. Ruan, H.A. Abderrahim,

- P. D'Hondt. Bruges, Belgium: World Scientific, 2000. P. 72–79.
127. *Utkin L.V., Kozine I.O.* Different faces of the natural extension // Imprecise Probabilities and Their Applications. Proc. of the 2nd Int. Symposium ISIPTA'01 / Ed. by G. de Cooman, T.L. Fine, T. Seidenfeld. Ithaca, USA: Shaker Publishing, 2001. P. 316–323.
  128. *Utkin L.V., Kozine I.O.* Stress-strength reliability models under incomplete information // International Journal of General Systems. 2002. Vol. 31, N 6. P. 549 – 568.
  129. *Utkin L.V., Kozine I.O.* Structural reliability modelling under partial source information // Proceedings of the Third Int. Conf. on Mathematical Methods in Reliability (Methodology and Practice) / Ed. by H. Langseth, B. Lindqvist. Trondheim, Norway: NTNU, 2002. P. 647–650.
  130. *Utkin L.V., Shaburov S.P.* Risk analysis on the basis of judgments supplied by unknown experts // Proc. of Int. Scientific School "Modelling and Analysis of Safety, Risk and Quality in Complex Systems- / Ed. by I.A. Ryabinin, E.D. Solojntsev. St. Petersburg: IPME RAS, 2004. P. 574–579.
  131. *Walley P.* Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities. London: Chapman and Hall, 1991.
  132. *Walley P.* Inferences from multinomial data: Learning about a bag of marbles // Journal of the Royal Statistical Society, Series B. 1996. Vol. 58. P. 3–57. with discussion.
  133. *Walley P.* Measures of uncertainty in expert systems // Artificial Intelligence. 1996. Vol. 83. P. 1–58.
  134. *Walley P.* A bounded derivative model for prior ignorance about a real-valued parameter // Scandinavian Journal of Statistics. 1997. Vol. 24, N 4. P. 463–483.
  135. *Walley P.* Statistical inferences based on a second-order possibility distribution // International Journal of General Systems. 1997. Vol. 9. P. 337–383.
  136. *Walley P., Fine T.L.* Towards a frequentist theory of upper and lower probability // Annals of Statistics. 1982. Vol. 10, N 3. P. 741–761.
  137. *Weichselberger K.* The theory of interval-probability as a unifying concept for uncertainty // International Journal of Approximate Reasoning. 2000. Vol. 24. P. 149–170.
  138. *Weichselberger K.* Elementare Grundbegriffe einer allgemeineren Wahrscheinlichkeitsrechnung. Heidelberg: Physika, 2001. Vol. I

Интервальной вероятности как всеобъемлющего понятия.

139. *Weichselberger K., Augustin T.* Analysing Ellsberg's Paradox by means of interval-probability // *Econometrics in Theory and Practice*. (Festschrift for Hans Schneeweiß) / Ed. by R. Galata, H. Küchenhof. Heidelberg: Physika, 1998. P. 291–304.
140. *Wilks S.* *Mathematical Statistics*. New York: Wiley and Sons, 1962.
141. *Winkler R.L.* The consensus of subjective probability distributions // *Management Science*. 1968. Vol. 15. P. 61–75.
142. *Winkler R.L.* Combining forecasts: A philosophical basis and some current issues // *International Journal of Forecasting*. 1989. Vol. 5. P. 605–609.
143. *Yager R.* Arithmetic and other operations on Dempster-Shafer structures // *International Journal of Man-Machine Studies*. 1986. Vol. 25. P. 357–366.
144. *Yager R.* On the Dempster-Shafer framework and new combination rules // *Information Sciences*. 1987. Vol. 41. P. 93–137.
145. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets // *Information and Control*. 1965. Vol. 8. P. 338–353.
146. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // *Fuzzy Sets and Systems*. 1978. Vol. 1. P. 3–28.
147. *Zellner A.* *An introduction to Bayesian Inference in Econometrics*. New York: Wiley, 1971.
148. *Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное издание. М.: Финансы и статистика, 1983. 471 с.
149. *Алефельд Г., Херцберггер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 360 с.
150. *Ашанов С.А.* *Линейное программирование*. М.: Наука, 1981. 340 с.
151. *Бойков А.В.* *Страхование и актуарные расчеты*. М.: РОХОС, 2004. 96 с.
152. *Боровков А.А.* *Курс теории вероятностей*. М.: Наука, 1972. 288 с.
153. *Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А.* *Оценка эффективности инвестиционных проектов: Теория и практика*. М.: Дело, 2002. 888 с.
154. *Гуров С.В., Уткин Л.В.* *Надежность систем при неполной*



- информации. СПб.: Любавич, 1999. 160 с.
155. *Дюбуа Д., Прад А.* Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. М.: Радио и связь, 1990. 288 с.
  156. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 165 с.
  157. *Кити Р.Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981. 560 с.
  158. *Клир Дж.* Системология. Автоматизация решения системных задач. М.: Радио и связь, 1990. 544 с.
  159. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.; Л.: Главная редакция общетехнической литературы и номотграфии, 1936. 80 с.
  160. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982. 432 с.
  161. *Кузнецов В.П.* Интервальные статистические модели. М.: Радио и связь, 1991. 352 с.
  162. *Лабскер Л.Г., Яновская Е.В.* Общая методика конструирования критериев оптимальности решений в условиях риска и неопределенности // Финансовый менеджмент. 2002. № 5. С. 13–24.
  163. *Ларичев О. И.* Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных Странах. М.: Логос, 2000. 296 с.
  164. *Льюс Р.Д., Райфа Х.* Игры и решения: Введение и критический обзор. М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. 642 с.
  165. *Москвин В.А.* Психологический аспект принятия инвестиционного решения // Инвестиционное кредитование. 2002. № 5. С. 26–32.
  166. *Нейман Дж.фон, Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. 708 с.
  167. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981. 208 с.
  168. Оценка эффективности инвестиционных проектов / П.Л. Виленский, В.Н. Лившиц, Е.Р. Орлова, С.А. Смоляк. М.: Дело, 1998. 248 с.
  169. *Пытьев Ю.П.* Возможность. Элементы теории и практики.

- М.: Эдиториал УРСС, 2000. 192 с.
170. *Райфа Х.* Анализ решений. М.: Наука, 1977. 408 с.
  171. *Розен В.В.* Математические модели принятия решений в экономике. М.: Книжный дом “Университет”, Высшая школа, 2002. 288 с.
  172. *Смоляк С.А.* Оценка эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности (теория ожидаемого эффекта). М.: ЦЭМИ РАН, 2001. 143 с.
  173. Справочник по прикладной статистике / Под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, Ю.Н. Тюрина. М.: Финансы и статистика, 1989. 510 с.
  174. *Тулубьев А.Л., Николенко С.И., Сироткин А.В.* Байесовские сети: Логико-вероятностный подход. СПб.: Наука, 2006. 607 с.
  175. *Уткин В.С., Уткин Л.В.* Надежность машин и оборудования. Вологда: ВоГТУ, 2007. 160 с. Учебное пособие.
  176. *Уткин Л.В.* Принятие решений при непрерывной функции распределения возможностей: две модели // Труды 10-й Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям. СПб.: СПбГЭТУ (ЛЭТИ), 2007. С. 261–264.
  177. *Уткин Л.В., Лапин А.Э.* Модели гарантийных обязательств в условиях ограниченной и неточной исходной информации // Управление риском. 2007. № 2. С. 53–60.
  178. *Уткин Л.В., Симанова Н.В., Лапин А.Э.* Осторожные байесовские модели анализа риска на основе априорного гамма-распределения и их применение // Труды 10-й Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям. СПб.: СПбГЭТУ (ЛЭТИ), 2007. С. 216–219.
  179. *Уткин Л.В., Шубинский И.Б.* Нетрадиционные методы оценки надежности информационных систем. СПб.: Любавич, 2000. 173 с.
  180. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2. 738 с.
  181. *Хьюбер П.* Робастность в статистике. М.: Мир, 1984. 304 с.
  182. *Черноруцкий И.Г.* Методы принятия решений. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 408 с.
  183. *Шокин Ю.А.* Интервальный анализ. Новосибирск: Наука, 1981. 112 с.

# Предметный указатель

- Аддитивность, 19  
Алгебра, 18  
Альтернатива, 216, 246  
Асимметрия, 97
- Бета-функция, 147  
    неполная, 155  
Булева алгебра, 72
- Вероятность  
    базовая, 39  
    нечеткая, 172  
    объективная, 21  
    субъективная, 21, 233  
Вес, 370  
Возможность, 68
- Гамма-функция, 121  
Гипотеза, 113  
Голландская книга, 24
- Действие, 216  
Дисперсия, 30, 97
- Индекс сравнения нечетких множеств, 275
- Критерий принятия решений  
    Г-максимакса, 247  
    Г-максимина, 247, 250, 251  
    Е-допустимости, 248  
    Уолли, 248  
    Ходжа–Лемана, 229, 267  
    интервального доминирования, 247  
    максимальности, 248  
    максимина Вальда, 222, 229, 263, 266  
    максимума ожидаемой полезности, 226  
    минимакса сожалений Сэвиджа, 225  
    минимума ожидаемых сожалений, 230  
    наиболее вероятного состояния природы, 230  
    пессимизма–оптимизма Гурвица, 223, 247, 268, 276  
    равновозможных состояний, 222  
    с параметром осторожности, 247, 254
- Лотерея, 239
- Математическое ожидание, 29  
Медиана, 117  
Мера  
    Сугено, 77  
    аддитивная, 36  
    вероятности, 18  
    внешняя, 31, 73  
    внутренняя, 31, 73  
    возможности, 67  
    необходимости, 68  
    нечеткая, 77  
    субаддитивная, 36  
    супераддитивная, 36
- Многозначное отображение, 45  
Множество  
    измеримое, 18  
    нечеткое, 63, 352  
    случайное, 46  
Мода, 92, 117

- Модель
  - засорения, 126
  - иерархическая, 173
  - интервальная средних, 84
  - обобщенная
    - Дирихле, 120
  - ограниченной производной, 120
  - полиномиальная, 120
  - робастная, 126
  - урновая, 45
- Модель неопределенности
  - второго порядка, 172
  - иерархическая, 172
- Независимость**, 26
  - неизвестное
    - взаимодействие, 101
  - отсутствие информации, 101
  - отсутствие сведений, 355
  - повторений, 108
  - свободное произведение, 107
  - случайных множеств, 355
  - строгая, 103, 355
- Необходимость, 68
- Нечеткая величина, 70
- Нечеткая ожидаемая
  - полезность, 274
- Нечеткое множество, 63, 274
- Нечеткое число, 273
- Носитель нечеткого множества, 63
- Ожидаемая полезность**, 246
- Ожидаемое значение, 29
- Параметр**
  - осторожности, 247, 254, 267
  - пессимизма, 224, 229
- Пари, 22
- Полезность, 217, 231, 246
- Постулат Байеса–Лапласа, 20, 119
- Потери, 218
- Правило комбинирования
  - Демпстера, 52
  - Инагаки, 60
  - Ягера, 58
- с дисконтированием, 55
- Признак, 81
  - центрированный, 90
- Принцип
  - инвариантности, 267
  - максимума энтропии, 20, 32
  - обобщения Заде, 64
- Принятие решений
  - в условиях
    - неопределенности, 221
    - в условиях определенности, 221
    - в условиях риска, 225
- Программирование
  - дробно-линейное, 98
  - линейное, 85
- Пространство
  - вероятностное, 18
  - выборочное, 18
  - элементарных исходов, 17
- Р-блоки**, 49, 305
- Рандомизированное действие, 218, 227, 270, 289, 331
- Распределение
  - возможностей, 67, 136, 137, 321, 323
- Распределение вероятностей
  - Дирихле, 120, 262, 263
  - апостериорное, 113
  - априорное, 113
  - бета, 146
  - бета-биномиальное, 148
  - гамма, 152
  - гамма-экспоненциальное, 162

- неинформативное, 118
- отрицательное
  - биномиальное, 153
  - полиномиальное, 120
  - симметричное, 97
  - унимодалное, 92
- Свидетельство, 113
- Симплекс вероятностей, 33, 89, 121
- Скрытые наблюдения, 133
- Случайная величина, 27
- Случайное отношение, 46
- Состояния природы, 216, 246
- Среднее, 117
  - верхнее, 82
  - интервальное, 82
  - нижнее, 82
  - точное, 82
  - условное, 98
- Среднеквадратическое отклонение, 30
- Средние
  - непротиворечивые, 84
- Стратегия
  - смешанная, 218, 227, 246, 251, 287
  - чистая, 218, 246
- Теорема
  - Байеса, 111, 112
  - продолжения, 84
- Теория
  - Демпстера–Шейфера, 38, 142, 144, 164, 194, 284, 317, 319, 353, 372
  - возможностей, 67
  - интервальных средних, 81
  - нечетких множеств, 63
  - свидетельств, 38
  - случайных множеств, 38, 194
- Теория вероятностей, 17
- Треугольная норма, 65
- Унимодалность, 92
- Фокальный элемент, 40
- Функция
  - доверия, 40, 194
  - правдоподобия, 40, 194
  - принадлежности, 63, 274, 352
  - распределения вероятностей, 28
- Эксцесс, 96

*Научное издание*

Лев Владимирович Уткин

**Анализ риска и принятие решений при неполной информации**

Редактор издательства *Л.С. Тихомирова*

Художник

Технический редактор

Корректор

Книга печатается по оригинал-макету, выполненному *Л.В. Уткиным*

Лицензия ИД № 02980 от 06 октября 2000 г.

Сдано в набор

Формат

Гарнитура

Усл. печ. л.

Тираж

Подписано к печати

Бумага

Печать

Уч.-изд. л.

Тип. зак. №

Санкт-Петербургская издательская фирма «Наука» РАН

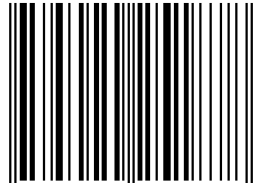
199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, 1

E-mail: [main@nauka.nw.ru](mailto:main@nauka.nw.ru)

Internet: [www.naukaspb.spb.ru](http://www.naukaspb.spb.ru)

**АДРЕС ТИПОГРАФИИ**

ISBN 978-5-02-025187-8



9 785020 251878



ЛЕВ ВЛАДИМИРОВИЧ УТКИН – доктор технических наук, профессор, проректор по научной работе Санкт-Петербургской государственной лесотехнической академии (СПбГЛТА), профессор кафедры информатики и информационных систем СПбГЛТА. Научные интересы: теория принятия решений, прикладная статистика, теория возможностей, теория вероятностей, теория интервальных средних, байесовский анализ, теория надежности, статистическое моделирование. Автор более 150 публикаций.

Как математически моделировать неполноту исходной информации?

Как оценить параметры страхования, если о страховых случаях нет достаточной информации?

Как определить параметры гарантийных обязательств, если данных об отказах практически нет?

Как выполнить анализ риска инвестиций, если эксперты не могут предоставить точные значения параметров проекта?

Как решить задачу принятия решений, если исходная информация является неполной, неточной и ненадежной?

На эти и многие другие вопросы можно найти ответы в этой книге.

Санкт-Петербург  
«НАУКА»

