Глава 3

Элементы теории Демпстера–Шейфера

> Эксперт излагает объективную точку зрения. А именно свою собственную.
>
> *Морарджи Десаи*

3.1. Основные определения теории Демпстера–Шейфера

Задачи принятия решения, рассмотренные выше, отличались либо полным отсутствием информации о состояниях природы (принятие решений в условиях неопределенности), либо точным знанием вероятностей состояний (принятие решений в условиях риска). Однако многие практические задачи могут занимать некоторое промежуточное положение. Другими словами, информация о состояниях природы имеется, но эта информация неточная и неполная. Одним из математических инструментов для решения таких задач и для моделирования и обработки неточных (интервальных) экспертных оценок, измерений или наблюдений является *теория Демпстера–Шейфера* [37, 39], также называемая математической *теорией свидетельств*, *теорией функций доверия* или *теорией случайных множеств*.

Теория Демпстера–Шейфера использует математические объекты, называемые “функциями доверия”. Обычно их основная цель заключается в моделировании степени доверия некоторого субъекта к чему-либо. В то же время в литературе имеется большое количество интерпретаций функций доверия, которые могут использоваться в различных прикладных задачах.

Пусть Ω – некоторое множество, которое в теории свидетельств иногда называется *универсальным множеством*. Предположим, что N наблюдений или измерений элемента $\omega \in \Omega$ было получено в качестве информации об объекте, принимающем значения из Ω. При этом предполагается, что результат измерений или наблюдений является неточным, т.е. представляет из себя некоторый интервал (подмножество) A значений Ω. Пусть c_i означает количество наблюдаемых подмножеств $A_i \subseteq \Omega$, а $\mathcal{P}o(\Omega)$ – множество всех подмножеств Ω. Частотная функция m, называемая *базовой вероятностью*, определяется как:

$$m : \mathcal{P}o(\Omega) \to [0, 1],$$

$$m(\varnothing) = 0,$$

$$\sum_{A \in \mathcal{P}o(\Omega)} m(A) = 1.$$

Заметим, что область определения базовых вероятностей $\mathcal{P}o(\Omega)$ отличается от области определения Ω функции распределения вероятностей. Базовая вероятность может быть получена следующим образом:

$$m(A_i) = c_i/N. \tag{3.1}$$

Если $m(A_i) > 0$, т.е. подмножество A_i в качестве результата измерения или наблюдения было получено хотя бы один раз, то A_i называется *фокальным элементом*.

Определим теперь функции доверия и правдоподобия. *Функция доверия*, обозначаемая $\mathrm{Bel}(A)$, и *функция правдоподобия*, обозначаемая $\mathrm{Pl}(A)$, события $A \subseteq \mathcal{P}o(\Omega)$ определяются как

$$\mathrm{Bel}(A) = \sum_{A_i : A_i \subseteq A} m(A_i), \quad \mathrm{Pl}(A) = \sum_{A_i : A_i \cap A \neq \varnothing} m(A_i). \tag{3.2}$$

Как показано в работах [38], функция доверия может быть формально определена как функция, удовлетворяющая аксиомам, являющимся ослабленным вариантом аксиом Колмогорова, характеризующих вероятность. Поэтому в некоторых случаях имеет смысл рассматривать функцию доверия (правдоподобия) как обобщенную вероятность, а доверие $\mathrm{Bel}(A)$ и правдоподобие $\mathrm{Pl}(A)$ как нижнюю и верхнюю вероятности события A, т.е. $\mathrm{Bel}(A) \leq \mathrm{Pr}(A) \leq \mathrm{Pl}(A)$.

Пример 3.1. После интервью четырех кандидатов на некоторую должность ($\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$) 10 экспертов ($N = 10$) пытаются определить наиболее вероятного кандидата. 5 экспертов ($c_1 = 5$) считают, что первый кандидат ($A_1 = \{1\}$) является наиболее предпочтительным, 2 эксперта ($c_2 = 2$) считают, что первый или второй кандидат ($A_2 = \{1, 2\}$) является наиболее предпочтительным, 3 эксперта ($c_3 = 3$) выбирают третьего кандидата ($A_3 = \{3\}$). Используя (3.1), получим:

$$\begin{aligned} m(A_1) &= c_1/N = 0.5, \\ m(A_2) &= c_2/N = 0.2, \\ m(A_3) &= c_3/N = 0.3. \end{aligned}$$

Найдем нижнюю и верхнюю границы для вероятности первого кандидата ($A = \{1\}$). Используя (3.2), получаем:

$$\begin{aligned} \mathrm{Bel}(A) &= m(A_1) = 0.5, \\ \mathrm{Pl}(A) &= m(A_1) + m(A_2) = 0.7. \end{aligned}$$

Нижняя и верхняя границы для вероятности второго кандидата ($A = \{2\}$):

$$\begin{aligned} \mathrm{Bel}(A) &= 0, \\ \mathrm{Pl}(A) &= m(A_2) = 0.2. \end{aligned}$$

Нижняя и верхняя границы для вероятности третьего кандидата ($A = \{3\}$):

$$\begin{aligned} \mathrm{Bel}(A) &= m(A_3) = 0.3, \\ \mathrm{Pl}(A) &= m(A_3) = 0.3. \end{aligned}$$

Функции доверия и правдоподобия могут быть определены также в случае, если множество Ω не является конечным, например Ω может быть множеством всех вещественных чисел. В этом случае расчеты остаются такими же, как это видно из следующего примера.

Пример 3.2. Опрос экспертов по поводу будущей цены акций некоторого предприятия дал следующие результаты: 4 эксперта ($c_1 = 4$) предоставили интервал $A_1 = [30, 36]$, 1 эксперт ($c_2 = 1$) – интервал $A_2 = [28, 40]$, 5 экспертов ($c_3 = 5$) предоставили интервал $A_3 = [34, 38]$. Определим функцию доверия и правдоподобия интервала $A = [28, 32]$. Так как $N = c_1 + c_2 + c_3 = 10$, то базовые вероятности каждого интервала имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} m(A_1) &= c_1/N = 0.4, \\ m(A_2) &= c_2/N = 0.1, \\ m(A_3) &= c_3/N = 0.5. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathrm{Bel}(A) &= 0, \\ \mathrm{Pl}(A) &= m(A_1) + m(A_2) = 0.5. \end{aligned}$$

Следует отметить, что определение (3.1) может быть использовано, когда количество наблюдений N достаточно большое. Однако это условие может часто нарушаться. Если N является малым, то результаты расчетов получаются слишком рискованными, чтобы им доверять.

Пусть в качестве статистических данных о случайной величине X имеется множество наблюдаемых интервалов A_i, $i = 1, ..., n$, с ненулевыми базовыми вероятностями, определенными в (3.1). Тогда можно вычислить нижнее и верхнее математические ожидания этой случайной случайной величины. Если X – непрерывная случайная величина, то

$$\underline{\mathbb{E}}X = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \cdot \inf A_i, \tag{3.3}$$

$$\overline{\mathbb{E}}X = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \cdot \sup A_i. \tag{3.4}$$

Если случайная величина X является дискретной, то выражения для математических ожиданий остаются абсолютно такими же.

Пример 3.3. Предположим, что имеются шесть экспертных оценок ($N = 6$) о возможных значениях случайной величины X, характеризующей стоимость акций некоторой фирмы в условных единицах на следующий день, которая может меняться в интервале $\Omega = [0, 10]$. Три эксперта ($c_1 = 3$) оценили интервал стоимости акций $A_1 = [4, 5]$, два эксперта ($c_2 = 2$) предоставили интервал $A_2 = [2, 4]$, и один эксперт ($c_3 = 1$) предоставил интервал $A_3 = [1, 5]$. Отсюда

$$m(A_1) = 1/2, \quad m(A_2) = 1/3, \quad m(A_3) = 1/6.$$

Нижняя граница ожидаемой цены акций равна

$$\underline{\mathbb{E}}X = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 1 = 2.833,$$

а верхняя граница ожидаемой цены акций равна

$$\overline{\mathbb{E}}X = \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 = 4.667.$$

Если рассматривать функцию $h(X)$ случайной величины X, то нижняя и верхняя границы математического ожидания функции h определяются на основе следующих выражений, обобщающих (3.3) и (3.4):

$$\underline{\mathbb{E}}h(X) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \cdot \inf_{x \in A_i} h(x), \tag{3.5}$$

$$\overline{\mathbb{E}}h(X) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \cdot \sup_{x \in A_i} h(x). \tag{3.6}$$

3.2. Основные отличия теории вероятностей и теории Демпстера-Шейфера

Отметим основные отличия классической теории вероятностей и теории Демпстера-Шейфера с точки зрения таких определяющих их понятий, как функция распределения и базовые вероятности.

Основное отличие между распределениями вероятностей и базовыми вероятностями заключается в том, что первые определены на множестве значений Ω, а вторые определены на множестве всех подмножеств множества Ω. Как следствие, базовые вероятности, функции доверия и правдоподобия имеют следующие свойства, отличающие их от элементов теории вероятностей.

1. В теории Демпстера-Шейфера не требуется выполнения условия $m(\Omega) = 1$. В теории вероятностей условие $\Pr(\Omega) = 1$ должно выполняться обязательно. Более того, если $m(\Omega) = 1$, то семейство всех фокальных элементов есть $\mathcal{F} = \{\Omega\}$, т.е. имеется единственный фокальный элемент и этим элементом является само множество Ω. Это случай полного отсутствия какой-либо информации, и все возможные распределения вероятностей могут быть приписаны элементам множества Ω. В рамках же теории вероятностей, согласно принципу максимума энтропии, для описания отсутствия какой-либо информации используется равномерное распределение на Ω. Если имеется единственный фокальный элемент $A \subset \Omega$, то $m(A) = 1$ и $m(\Omega) = 0$.

2. В теории Демпстера-Шейфера не требуется выполнения условия $m(A) \leq m(B)$, если $A \subseteq B$, и наоборот. В теории вероятностей данное условие должно выполняться обязательно. Более того, в теории Демпстера-Шейфера каждый фокальный элемент должен рассматриваться как объект сам по себе. Если выполняется неравенство $m(A) \leq m(B)$, то это лишь означает, что объект A имеет меньшую вероятность, чем объект B, но при этом совсем не обязательно выполнение условия $A \subseteq B$.

3. В теории Демпстера-Шейфера нет слишком жесткой свя-

зи между базовыми вероятностями $m(A)$ и $m(A^c)$, где A^c – дополнение к A. В теории вероятностей всегда имеет место равенство $\Pr(A) = 1 - \Pr(A^c)$.

В теории Демпстера-Шейфера аналогами основных свойств теории вероятностей являются следующие:

1. Пусть $\{A_i, i = 1, ..., n\}$ – множество всех фокальных элементов. Тогда выполняется условие $\sum_{i=1}^{n} m(A_i) = 1$.

2. Для любого события A выполняются условия $\mathrm{Bel}(A) = 1 - \mathrm{Pl}(A^c)$ и $\mathrm{Pl}(A) = 1 - \mathrm{Bel}(A^c)$.

3.3. Правила комбинирования свидетельств

Информация в виде различных наборов фокальных элементов с их базовыми вероятностями может быть получена из различных источников. Эти источники предоставляют различные данные об одном и том же объекте или явлении, но являются независимыми. Для комбинирования данных, полученных из независимых источников, используется ряд правил. При этом каждое правило имеет свои преимущества и недостатки. Поэтому рассмотрим только наиболее распространенные из них.

Предположим, что имеются два источника данных. Первый источник предоставляет N_1 наблюдений (свидетельств) $A_i^{(1)} \subseteq \Omega$, $i = 1, ..., n_1$, и $c_i^{(1)}$ – число наблюдаемых множеств $A_i^{(1)}$, $i = 1, ..., n_1$. Второй источник предоставляет N_2 наблюдений (свидетельств) $A_i^{(2)} \subseteq \Omega$, $i = 1, ..., n_2$, и $c_i^{(2)}$ – число наблюдаемых множеств $A_i^{(2)}$, $i = 1, ..., n_2$.

3.3.1. Правило комбинирования Демпстера

Правило комбинирования Демпстера основано на предположении, что источники данных абсолютно независимы. Обозначим базовые вероятности фокальных элементов, полученных из первого и второго источников, следующим образом:

$$m_1(A_i^{(1)}) = c_i^{(1)}/N_1,\ m_2(A_j^{(2)}) = c_j^{(2)}/N_2.$$

Тогда комбинированная базовая вероятность (m_{12}) вычисляется по формуле

$$m_{12}(A) = \frac{1}{1-K} \sum_{A_i^{(1)} \cap A_j^{(2)} = A} m_1(A_i^{(1)}) m_2(A_j^{(2)}),$$

где

$$K = \sum_{A_i^{(1)} \cap A_j^{(2)} = \varnothing} m_1(A_i^{(1)}) m_2(A_j^{(2)})$$

и $m_{12}(\varnothing) = 0$. Заметим, что если два фокальных элемента из разных источников не пересекаются, т.е. $A_i^{(1)} \cap A_j^{(2)} = \varnothing$, то соответствующие источники противоречат друг другу или конфликтуют. Например, если один эксперт считает, что температура воздуха на следующий день будет в интервале от 10 до 12 градусов, а другой эксперт полагает, что температура будет в пределах от 16 до 20 градусов, то становится очевидным, что экспертные оценки противоречивы или конфликтны, так как $[10, 12] \cap [16, 20] = \varnothing$. Конфликтность свидетельств учитывается коэффициентом K, который представляет собой общую базовую вероятность, связанную с конфликтными свидетельствами. Если все свидетельства противоречивы, т.е. $K = 1$, то полностью противоречивые источники не могут быть объединены при помощи правила комбинирования Демпстера.

Пример 3.4. Четыре предприятия ($\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$) являются кандидатами для покупки акций. 5 экспертов из первой группы считают, что необходимо покупать акции первого предприятия; 3 эксперта из первой группы считают, что необходимо покупать акции второго или третьего предприятия; 8 экспертов из второй независимой группы считают, что необходимо покупать акции первого или второго предприятия; 7 экспертов из второй группы считают, что необходимо покупать акции третьего предприятия, и один эксперт из второй группы считает, что необходимо покупать акции четвертого предприятия. Первый источник: $N_1 = 8$, $c_1^{(1)} = 5$, $A_1^{(1)} = \{1\}$, $m_1(A_1^{(1)}) = 5/8$, $c_2^{(1)} = 3$, $A_2^{(1)} = \{2, 3\}$, $m_1(A_2^{(1)}) = 3/8$. Второй источник: $N_2 = 16$, $c_1^{(2)} = 8$, $A_1^{(2)} = \{1, 2\}$, $m_2(A_1^{(2)}) = 8/16$, $c_2^{(2)} = 3$, $A_2^{(2)} = \{3\}$, $m_2(A_2^{(2)}) = 7/16$, $c_3^{(2)} = 1$, $A_3^{(2)} = \{4\}$, $m_2(A_3^{(2)}) = 1/16$.

Таблица 3.1. Данные, полученные из двух источников, и их пересечения

		$A_i^{(1)}$	
		$\{1\}$	$\{2,3\}$
$A_i^{(2)}$	$\{1,2\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
	$\{3\}$	$\varnothing$	$\{3\}$
	$\{4\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

В табл. 3.1 представлены все возможные пересечения $A_i^{(1)} \cap A_j^{(2)}$ фокальных элементов из двух источников.

Коэффициент конфликтности K вычисляется, исходя из того что $A_1^{(1)} \cap A_2^{(2)} = \varnothing$, $A_1^{(1)} \cap A_3^{(2)} = \varnothing$, $A_2^{(1)} \cap A_3^{(2)} = \varnothing$ (см. в табл. 3.1 клетки с элементами "$\varnothing$"), т.е.

$$\begin{aligned} K = {} & m_1(A_1^{(1)})m_2(A_2^{(2)}) + m_1(A_1^{(1)})m_2(A_3^{(2)}) + \\ & + m_1(A_2^{(1)})m_2(A_3^{(2)}) = \\ & = \frac{5}{8} \cdot \frac{7}{16} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{16} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{16} = 0.336 \end{aligned}$$

Отсюда $1 - K = 1 - 0.336 = 0.664$. Из табл. 3.1 также видно, что непустые пересечения имеют вид $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$. Тогда

$$m_{12}(\{1\}) = m_1(A_1^{(1)})m_2(A_1^{(2)})/0.664 = 0.4706,$$

$$m_{12}(\{2\}) = m_1(A_2^{(1)})m_2(A_1^{(2)})/0.664 = 0.2824,$$

$$m_{12}(\{3\}) = m_1(A_2^{(1)})m_2(A_2^{(2)})/0.664 = 0.2470.$$

Из полученных базовых вероятностей можно вычислить функции доверия и правдоподобия:

$$\mathrm{Bel}(\{1\}) = m_{12}(\{1\}) = \mathrm{Pl}(\{1\}) = 0.4706,$$

$$\mathrm{Bel}(\{2\}) = m_{12}(\{2\}) = \mathrm{Pl}(\{2\}) = 0.2824,$$

$$\mathrm{Bel}(\{3\}) = m_{12}(\{3\}) = \mathrm{Pl}(\{3\}) = 0.2470.$$

В отзыве на книгу Шейфера "Математическая теория свидетельств" один из основателей теории нечетких множеств Заде представил пример, показывающий, что правило комбинирования Демпстера может давать “некорректные” результаты в случае большого количества противоречивых данных. Представим, что пациент осматривается двумя врачами-терапевтами по поводу неврологических симптомов. Первый врач уверен, что у пациента либо менингит с вероятностью 0.99, либо опухоль мозга с вероятностью 0.01. Второй врач уверен, что у пациента расстройство нервной системы после сотрясения с вероятностью 0.99, но допускает опухоль мозга с вероятностью 0.01. Комбинируя полученные свидетельства при помощи правила Демпстера, получаем равенство

$$\mathrm{Bel}(\text{опухоль}) = m(\text{опухоль}) = 1.$$

Следовательно, результат комбинирования поддерживает полностью диагноз, который оба врача рассматривают как очень маловероятный. Необходимо отметить, что причиной такого результата является предположение о том, что источники абсолютно надежны и предоставляют верные сведения. Поэтому при наличии противоречивых оценок из различных источников правило Демпстера “ищет” то общее, что имеется в обоих источниках, и “отбрасывает” все, что различается в них.

3.3.2. Правило дисконтирования

Как было отмечено выше, правило комбинирования Демпстера предполагает абсолютную надежность источников информации. Однако существует всегда сомнение, что источники абсолютно надежны. Для того чтобы учесть надежность источников, Шейфер предложил использование дисконтирования базовых вероятностей некоторым коэффициентом $\alpha \in [0, 1]$, характеризующим надежность источника, т.е. умножения базовой вероятности на α. В результате для каждого фокального элемента A получаем новые базовые вероятности $m^{\alpha}(A) = (1 - \alpha)m(A)$. Если коэффициент дисконтирования равен 1, то источник является абсолютно ненадежным и $m^{\alpha}(A) = 0$. Наоборот, если $\alpha = 0$, то источник является абсолютно надежным и $m^{\alpha}(A) = m(A)$. Чтобы выполнить условие нормирования базовых вероятностей (сумма базовых вероятностей всех фокальных элементов равна 1), при дисконтировании добавляется базовая вероятность всего множества Ω, т.е. $m^{\alpha}(\Omega) = \alpha + (1-\alpha)m(\Omega)$. Фактически добавление ненулевой базовой вероятности Ω не меняет информации, имеющейся в распоряжении. Если эксперт говорит, что "любой элемент Ω" может быть "истинным" значением случайной величины, то он не дает никакой дополнительной информации.

Интересно отметить, что использование дисконтирования даже при очень малых значениях α делает коэффициент K в правиле комбинирования Демпстера не равным 1 и, следовательно, позволяет всегда найти комбинированную оценку независимо от количества противоречивой информации. Одной из причин этого факта является ненулевая базовая вероятность Ω. С одной стороны, оценка Ω не дает никакой дополнительной информации. С другой стороны, она размывает конечный результат и за счет этого делает его более осторожным.

Пример 3.5. Вернемся к предыдущему примеру о покупке акций четырех предприятий. 100 экспертов из первой группы считают, что необходимо покупать акции второго предприятия; 60 экспертов из первой группы считают, что необходимо покупать акции второго или третьего предприятия; 8 экспертов из второй независимой группы считают, что необходимо покупать акции первого. Первый источник: $N_1 = 160$, $c_1^{(1)} = 100$, $A_1^{(1)} = \{2\}$, $m_1(A_1^{(1)}) = 100/160$, $c_2^{(1)} = 60$, $A_2^{(1)} = \{2,3\}$, $m_1(A_2^{(1)}) = 60/160$. Второй источник: $N_2 = 8$, $c_1^{(2)} = 8$, $A_1^{(2)} = \{1\}$, $m_2(A_1^{(2)}) = 1$. Нетрудно увидеть, что

$$K = m_1(A_1^{(1)})m_2(A_1^{(2)}) + m_1(A_2^{(1)})m_2(A_1^{(2)}) = 1.$$

Следовательно, невозможно получить комбинированную оценку, используя правило комбинирования Демпстера. Поэтому используем правило дисконтирования с учетом надежности источников. Так как первый источник содержит намного больше экспертов, чем второй, то можно считать его более надежным по сравнению с первым источником[1]. Примем $\alpha_1 = 1 - 160/168 = 0.048$ и $\alpha_2 = 1 - 8/168 =$

[1] Подход для анализа коэффициентов дисконтирования, используемый в примере, основан на подсчете относительного соотношения количества

0.952. Заметим, что вовсе не обязательно, чтобы сумма коэффициентов дисконтирования была бы равна 1. Тогда

$$m_1^{\alpha_1}(A_1^{(1)}) = (1-\alpha_1)\cdot 100/160 = 0.595,$$

$$m_1^{\alpha_1}(A_2^{(1)}) = (1-\alpha_1)\cdot 60/160 = 0.357,$$

$$m_1^{\alpha_1}(\Omega) = \alpha_1 = 0.048,$$

$$m_2^{\alpha_2}(A_1^{(2)}) = (1-\alpha_2)\cdot 1 = 0.048,$$

$$m_2^{\alpha_2}(\Omega) = \alpha_2 = 0.952.$$

Теперь можно использовать правило комбинирования Демпстера, согласно которому

$$K = m_1^{\alpha_1}(A_1^{(1)})m_2^{\alpha_2}(A_1^{(2)}) + m_1^{\alpha_1}(A_2^{(1)})m_2^{\alpha_2}(A_1^{(2)}) = \\ = 0.595\cdot 0.048 + 0.357\cdot 0.048 = 0.046,$$

$$1-K = 0.954,$$

$$m_{12}(\{1\}) = m_1^{\alpha_1}(\Omega)m_2^{\alpha_2}(A_1^{(2)})/(1-K) = \\ = 0.048\cdot 0.048/0.954 = 0.002,$$

$$m_{12}(\{2\}) = m_1^{\alpha_1}(A_1^{(1)})m_2^{\alpha_2}(\Omega)/(1-K) = \\ = 0.595\cdot 0.952/0.954 = 0.594,$$

$$m_{12}(\{2,3\}) = m_1^{\alpha_1}(A_2^{(1)})m_2^{\alpha_2}(\Omega)/(1-K) = \\ = 0.357\cdot 0.952/0.954 = 0.356,$$

$$m_{12}(\Omega) = m_1^{\alpha_1}(\Omega)m_2^{\alpha_2}(\Omega)/(1-K) = \\ = 0.048\cdot 0.952/0.954 = 0.048.$$

Следует отметить, что

$$m_{12}(\{1\}) + m_{12}(\{2\}) + m_{12}(\{2,3\}) + m_{12}(\Omega) = 1.$$

оценок каждого источника. Этот подход не является строгим с математической точки зрения, но может применяться в тех случаях, когда нет никакой дополнительной информации о надежности источников.

Найдем функции доверия и правдоподобия для всех предприятий

$$\mathrm{Bel}(\{1\}) = m_{12}(\{1\}) = 0.002,$$
$$\mathrm{Pl}(\{1\}) = m_{12}(\{1\}) + m_{12}(\Omega) = 0.05,$$

$$\mathrm{Bel}(\{2\}) = m_{12}(\{2\}) = 0.594,$$
$$\mathrm{Pl}(\{2\}) = m_{12}(\{2\}) + m_{12}(\{2,3\}) + m_{12}(\Omega) = 0.998,$$

$$\mathrm{Bel}(\{3\}) = 0,\ \mathrm{Pl}(\{3\}) = m_{12}(\{2,3\}) + m_{12}(\Omega) = 0.404,$$

$$\mathrm{Bel}(\{4\}) = 0,\ \mathrm{Pl}(\{4\}) = m_{12}(\Omega) = 0.048.$$

Теория Демпстера–Шейфера является достаточно мощным инструментом для моделирования неточности и неопределенности. Она позволяет моделировать полное отсутствие исходной информации. Функции доверия и правдоподобия некоторого события можно рассматривать как верхнюю и нижнюю границы вероятности этого события. С этой точки зрения теория Демпстера–Шейфера не является альтернативой теории вероятностей, а дополняет и обобщает ее.

3.4. Принятие решений при неточных исходных данных и сравнение интервалов

Ниже будет рассмотрен очень важный с практической точки зрения случай неточных или интервальных наблюдений или экспертных оценок состояний природы в задаче принятия решений. При этом неточность может быть слишком существенной, чтобы заменить эти оценки некоторыми точечными значениями $\{\omega_j\}$. Говоря о неточной оценке $A_i \subseteq \Omega$ состояний, предполагается, что состояние природы, которое реализовалось в действительности неизвестно, но это состояние находится в интервале A_i. Источниками таких оценок могут быть как экспертные суждения, так и статистические наблюдения. Одним из возможных математических аппаратов для решения задачи принятия решений в рассматриваемой ситуации является теория Демпстера-Шейфера.

Пусть имеется c_i интервальных оценок $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1, ..., M$. При этом $\sum_{k=1}^{M} c_k = N$. Если состояния природы являются дискретными, то целесообразно также ввести множество J_i индексов состояний природы, принадлежащих A_i, т.е. $A_i = \{\omega_j : j \in J_i\}$.

Так как точное распределение вероятностей состояний природы неизвестно, то очевидно, что только интервал ожидаемой полезности может быть получен на основе имеющейся информации. При этом, если известны базовые вероятности $m(A_i) = c_i/N$ соответствующих интервалов A_i, $i = 1, ..., M$, то нижняя и верхняя границы математического ожидания функции полезности (ожидаемой полезности) в случае использования чистой стратегии могут быть найдены из выражений (3.5)-(3.6), заменив функцию h на функцию полезности альтернативы с номером r, т.е.

$$\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_r = \sum_{A_k \subseteq \Omega} \min_{i:\omega_i \in \Omega} u_{ri} \cdot m(A_i) = \frac{1}{N} \sum_{A_k \subseteq \Omega} \min_{i:\omega_i \in \Omega} u_{ri} \cdot c_i, \tag{3.7}$$

$$\overline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_r = \sum_{A_k \subseteq \Omega} \max_{i:\omega_i \in \Omega} u_{ri} \cdot m(A_i) = \frac{1}{N} \sum_{A_k \subseteq \Omega} \max_{i:\omega_i \in \Omega} u_{ri} \cdot c_i. \tag{3.8}$$

Таким образом, для каждой альтернативы вычисляются нижняя и верхняя границы ожидаемой полезности. Далее решение задачи сводится к сравнению интервалов $[\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_r, \overline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_r]$ для всех r.

Пример 3.6. Рассмотрим задачу об инвестициях. Функция полезности показана в таблице 2.1. Три эксперта предоставили следующие оценки: два эксперта ($c_1 = 3$) считают, что в экономике будут наблюдаться "средний подъем" или "быстрый подъем", ($A_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$), один эксперт ($c_2 = 1$) полагает, что будет наблюдаться "средний подъем" или "неизменное состояние" ($A_2 = \{\omega_2, \omega_3\}$). Здесь $M = 2$, $N = 4$.

Используя (3.7) и (3.8), можно вычислить нижние и верхние границы ожидаемой полезности для каждого действия

$$\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{4}(3 \cdot \min(12,8) + 1 \cdot \min(8,6)) = 7.5,$$

$$\overline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{4}(3 \cdot \max(12,8) + 1 \cdot \max(8,6)) = 11,$$

$$\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_2 = \frac{1}{4}(3 \cdot \min(15,7) + 1 \cdot \min(7,3)) = 6,$$

$$\overline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_2 = \frac{1}{4}(3 \cdot \max(15,7) + 1 \cdot \max(7,3)) = 13,$$

$$\underline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_3 = \frac{1}{4}(3 \cdot \min(7,7) + 1 \cdot \min(7,7)) = 7.$$

$$\overline{\mathbb{E}}\mathbf{u}_3 = \frac{1}{4}(3 \cdot \max(7,7) + 1 \cdot \max(7,7)) = 7.$$

В итоге получаем три интервала значений ожидаемой полезности $[7.5, 11]$, $[6, 13]$, $[7, 7]$.

Результатом большинства расчетов при неточных исходных оценках является интервальный характер значений ожидаемой полезности. Если первую и третью альтернативу в рассмотренном примере можно сравнить, то соотношение остальных альтернатив находится под вопросом. Это связано с тем, что сравнение интервалов в общем случае не может быть однозначным. Как например сравнить интервалы $[7.5, 11]$ и $[6, 13]$? Существует большое количество методов сравнения интервалов. Большинство методов основано на сопоставлении интервалов и некоторых точных чисел, которые далее можно сравнивать без особых трудностей. Ниже рассмотрен один из методов, который в большей степени отражает субъективный характер принятия решений.

Рассмотрим два интервала $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$. Поставим в соответствие каждому интервалу точное число, вычисленное по формуле

$$\gamma a_i + (1 - \gamma) b_i, \ i = 1, 2.$$

Здесь $0 \le \gamma \le 1$ является коэффициентом пессимизма, который аналогичен тому, что использовался в критерии Гурвица. Если $\gamma = 1$, то сравниваются только нижние границы интервалов и принимается пессимистическое решение. Если $\gamma = 0$, то сравниваются только верхние границы интервалов и принимается оптимистическое решение. В общем случае имеет место неравенство $[a_1, b_1] \ge [a_2, b_2]$, если выполняется неравенство

$$\gamma a_1 + (1-\gamma) b_1 \ge \gamma a_2 + (1-\gamma) b_2.$$

Пример 3.7. Возвращаясь к интервальным результатам примера 3.6 и принимая $\gamma = 0.6$, получим точечные значения ожидаемой полезности альтернатив:

$$0.6 \cdot 7.5 + (1-0.6) \cdot 11 = 8.9,$$

$$0.6 \cdot 6 + (1-0.6) \cdot 13 = 8.8,$$

$$0.6 \cdot 7 + (1-0.6) \cdot 7 = 7.$$

Отсюда оптимальной является первая альтернатива.

Предлагаемый подход можно также использовать для решения задачи на основе критерия минимума ожидаемых сожалений. Используя ранее введенные обозначения для сожалений, запишем выражение для расчета нижней и верхней границ ожидаемого сожаления для r-го действия

$$\underline{\mathbb{E}}\Delta\mathbf{u}_r = \sum_{A_k \subseteq \Omega} \min_{i:\omega_i \in \Omega} \Delta u_{ri} \cdot m(A_i),$$

$$\overline{\mathbb{E}}\Delta\mathbf{u}_r = \sum_{A_k \subseteq \Omega} \max_{i:\omega_i \in \Omega} \Delta u_{ri} \cdot m(A_i).$$

Пример 3.8. Возвращаясь к примеру 3.6 и используя таблицу сожалений 2.4, можно получить

$$\underline{\mathbb{E}}\Delta\mathbf{u}_1 = \frac{1}{4}(3 \cdot \min(3,0) + 1 \cdot \min(0,1)) = 0,$$

$$\overline{\mathbb{E}}\Delta\mathbf{u}_1 = \frac{1}{4}(3 \cdot \max(3,0) + 1 \cdot \max(0,1)) = 2.5.$$

Аналогичным образом получим $\underline{\mathbb{E}}\Delta\mathbf{u}_2 = 0.25$, $\overline{\mathbb{E}}\Delta\mathbf{u}_2 = 1.75$, $\underline{\mathbb{E}}\Delta\mathbf{u}_3 = 0.75$, $\overline{\mathbb{E}}\Delta\mathbf{u}_3 = 6.25$. Для вычисления точечных значений полученных интервалов необходимо обратить внимание, что оптимальная альтернатива соответствует минимальному значению ожидаемых сожалений. Поэтому, принимая $\gamma = 0.6$ для поиска максимума, мы должны взять $\gamma' = 1 - \gamma = 0.4$ для поиска минимума, так как пессимистическим теперь будет сравнение по верхним границам. Отсюда получаем

$$\gamma'\underline{\mathbb{E}}\Delta\mathbf{u}_1 + (1-\gamma')\overline{\mathbb{E}}\Delta\mathbf{u}_1 = 0.4 \cdot 0 + (1-0.4) \cdot 2.5 = 1.5,$$

$$\gamma'\underline{\mathbb{E}}\Delta\mathbf{u}_2 + (1-\gamma')\overline{\mathbb{E}}\Delta\mathbf{u}_2 = 0.4 \cdot 0.25 + (1-0.4) \cdot 1.75 = 1.15,$$

$$\gamma'\underline{\mathbb{E}}\Delta\mathbf{u}_3 + (1-\gamma')\overline{\mathbb{E}}\Delta\mathbf{u}_3 = 0.4 \cdot 0.75 + (1-0.4) \cdot 6.25 = 4.05.$$

Следовательно, оптимальной является вторая альтернатива.

3.5. Контрольные вопросы

1) Как определяется базовая вероятность в теории Демпстера-Шейфера?
2) Как соотносятся между собой функция доверия и правдоподобия?
3) Как определить функцию доверия?
4) Как определить функцию правдоподобия?
5) Чему равна сумма базовых вероятностей всех фокальных элементов?
6) Что называется фокальным элементом в теории Демпстера-Шейфера?
7) Когда базовая вероятность в теории Демпстера-Шейфера совпадает с классической вероятностью?
8) Как определяется математическое ожидание функции случайной величины в теории Демпстера-Шейфера?
9) Кокое основное условие для источников должно выполняться при использовании правила комбинирования Демпстера?
10) Когда коэффициент конфликтности в правиле комбинирования Демпстера равен единице?

11) Почему правило комбинирования Демпстера может давать “некорректные” результаты в случае большого количества противоречивых данных?

12) Какова главная цель дисконтирования источников информации при комбинировании?

13) Какие существуют отличия теории вероятностей и теории Демпстера-Шейфера?

14) Как определяется ожидаемая полезность при неточных исходных данных о состояниях природы.

15) Каким образом можно сравнивать интервалы и что означает коэффициент пессимизма при сравнении интервалов?

3.6. Задачи

1) В течение дня в различных банках были зафиксированы следующие интервалы между покупной ценой и ценой продажи некоторой валюты: четыре раза интервал [30,36], один раз интервал [28,40], пять раз интервал [34,38]. Определить функцию доверия и правдоподобия интервала [28,32].

2) Имеются четыре кандидата на некоторую должность. После интервью два экспертов считают, что второй кандидат является наиболее предпочтительным, три эксперта считают, что первый или второй кандидат является наиболее предпочтительным, три эксперта выбирают третего кандидата. Определить функцию доверия и правдоподобия второго кандидата.

3) Четыре фирмы являются кандидатами для инвестиций. Три эксперта выбрали 1-ую фирму. Один эксперт - 1-ую и 2-ую. Один эксперт - 3-ю. Найти функции доверия и правдоподобия выбора первой фирмы.

4) Имеются четыре кандидата на некоторую должность. После интервью пять экспертов считают, что третий кандидат является наиболее предпочтительным, два эксперта считают, что первый или второй кандидат является наиболее предпочтительным, три эксперта считают, что все три кандидата подходят на должность. Определить наиболее вероятного кандидата.

5) Три предприятия являются кандидатами для покупки акций. 6 экспертов из первой группы считают, что необходимо покупать акции второго предприятия; 2 эксперта из первой группы считают, что необходимо покупать акции второго или третьего предприятия; 5 экспертов из второй независимой группы считают, что необходимо покупать акции первого или третьего предприятия; 1 эксперт из второй группы считают, что необходимо покупать акции третьего предприятия. Определить функции доверия и правдоподобия для всех предприятий.

6) Решить предыдущую задачу, предполагая, что первый источник в два раза надежнее второго.

7) Имеются две альтернативы: купить акции предприятия и держать деньги в банке. Имеются также два состояния природы: спад в экономике и рост. В случае спада потери от акций 10 у.е., доход от банка 15 у.е. В случае подъема доход от акций 40 у.е., а от банка 15 у.е. 3 экспетра считают, что будет рост экономики, 7 экспертов - не знают. Какое действие является оптимальным при коэффициенте пессимизма 0.6?

8) Коэффициент рентабельности первого предприятия от 5% до 20%, второго предприятия – 10%. Какое предприятие имеет больший коэффициент рентабельности при коэффициенте пессимизма 0?

9) Коэффициент рентабельности первого предприятия – интервал [2.2%, 5%], второго предприятия – [6%, 7%]. При каком коэффициенте пессимизма рентабельности равны?